

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΠΟΛΥΣΧΙΔΗ ΚΑΙ ΤΗ ΧΑΟΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

Βασίλειος Π. Δρακόπουλος



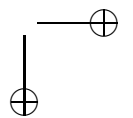
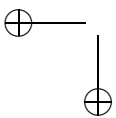
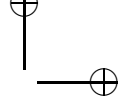
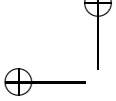
ΑΘΗΝΑ 1992

---

<sup>0</sup>Εικόνα εξωφύλλου: το σύνολο Mandelbrot όπως φαίνεται μέσα από τη σφαίρα Riemann.

# Περιεχόμενα

Πρόλογος	7
Εισαγωγή	9
<b>1 Ο χώρος των πολυσχιδών</b>	<b>13</b>
1.1 Μετρικοί χώροι . . . . .	13
1.2 Μετασχηματισμοί σε μετρικούς χώρους . . . . .	25
<b>2 Χαοτική δυναμική σε πολυσχιδή</b>	<b>49</b>
2.1 Συμβολική δυναμική . . . . .	49
2.1.1 Άλλοι παράξενοι ελκυστές . . . . .	63
2.2 Χάος . . . . .	83
2.3 Το σύνολο Mandelbrot και τα σύνολα Julia . . . . .	85
2.3.1 Το σύνολο Mandelbrot . . . . .	85
2.3.2 Τα σύνολα Julia . . . . .	92
<b>Α΄ Η ΒΑΣΙΚΗ ΜΟΝΑΔΑ</b>	<b>111</b>
Βιβλιογραφία	115
Ευρετήριο	118



# Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Το τρίγωνο Sierpiński εκκινώντας από τρίγωνο. . . . .	31
1.2	Το τρίγωνο Sierpiński εκκινώντας από τετράγωνο. . . . .	32
1.3	Το τρίγωνο Sierpiński εκκινώντας από κύκλο. . . . .	33
1.4	Το τρίγωνο Sierpiński. . . . .	37
1.5	Ένα φύλλο φτέρης. . . . .	38
1.6	Μορφοκλασματικά δένδρα. . . . .	41
1.7	Μορφοκλασματικά δένδρα (συνέχεια). . . . .	42
1.8	Μορφοκλασματικά δένδρα (συνέχεια). . . . .	43
2.1	Ο ελκυστής Hénon. . . . .	53
2.2	Ένας ελκυστής τύπου Hénon. . . . .	55
2.3	Ο ελκυστής Lorenz. . . . .	57
2.4	Διάφορες προβολές του ελκυστή Lorenz. . . . .	59
2.5	Προβολή στο επίπεδο των $XY$ ενός παράξενου ελκυστή. . . . .	63
2.6	Προβολή στο επίπεδο των $YZ$ ενός παράξενου ελκυστή. . . . .	64
2.7	Ο ελκυστής Rössler. . . . .	66
2.8	Ελκυστής των Martin και Dewdney. . . . .	68
2.9	Ένα ιστοδιάγραμμα. . . . .	73
2.10	Ένα ιστοδιάγραμμα. . . . .	76
2.11	Ένα διάγραμμα διακλαδώσεων για την πληθυσμιακή εξίσωση. . . . .	79
2.12	Επέκταση του διαγράμματος διακλαδώσεων. . . . .	80
2.13	Το σύνολο Mandelbrot. . . . .	86
2.14	Το σύνολο Mandelbrot μέσα από ένα διάγραμμα ταχυτήτων. . . . .	88
2.15	Το σύνολο Mandelbrot μέσα από μία χρωματική κορώνα. . . . .	90
2.16	Τροποποιημένο τρίγωνο Sierpiński ως ένα διαφεύγον δυναμικό σύστημα. . . . .	94
2.17	Ένα διαφεύγον δυναμικό σύστημα. . . . .	96
2.18	Τροποποιημένο τρίγωνο Sierpiński ως ένα διαφεύγον δυναμικό σύστημα. . . . .	98
2.19	Χιονονιφάδες. . . . .	101

2.20	Χιονοιφάδες (συνέχεια). . . . .	102
2.21	Χιονοιφάδες (συνέχεια). . . . .	103
2.22	Ένα σύνολο Julia μέσα από ένα διάγραμμα ταχυτήτων. . . . .	106
2.23	Ένα σύνολο Julia μέσα από ένα διάγραμμα ταχυτήτων. . . . .	108

# Πρόλογος

Είναι γνωστό ότι, στα γραφικά με υπολογιστή, ο γεωμετρικός σχεδιασμός πολύπλοκων αντικειμένων είναι μια δύσκολη διεργασία. Μια σημαντική κλάση πολύπλοκων αντικειμένων προκύπτει από φυσικά φαινόμενα: δένδρα, φυτά, σύννεφα, βουνά, κ.λ.π. Αυτήν τη στιγμή οι ερευνητές εξετάζουν διάφορες τεχνικές για να επεκτείνουν τις σχεδιαστικές ικανότητες, ώστε να συμπεριλάβουν όσο το δυνατόν περισσότερες κλάσεις.

Όλα άρχισαν από την παρατήρηση του Mandelbrot για την ύπαρξη μίας γεωμετρίας της φύσης η οποία είναι μια επέκταση της Ευκλείδειας. Μια μαθηματική έννοια η οποία φαίνεται ότι έχει σημαντική σπουδαιότητα γι' αυτό, είναι τα fractal (θραυσμένα ή πολυσχιδή ή μορφοκλασματικά) σύνολα.

Τα fractals, όπως ορίσθηκαν από τον Mandelbrot, είναι εκείνα τα σύνολα των οποίων η Hausdorff–Besicovitch διάσταση, η οποία είναι γενικώς ένας πραγματικός αριθμός, διαφέρει από την τοπολογική διάσταση. Αργότερα ο ίδιος ο Mandelbrot δήλωσε ότι είναι εκείνα τα σύνολα τα οποία φτιάχνονται τμηματικώς (δηλαδή κλασματικώς) και έχουν πολλές όμοιες διακλαδώσεις.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον υπάρχει γενικώς στη διεθνή επιστημονική κοινότητα για τη χρήση των fractals ως ένα μοντέλο πολύπλοκων φυσικών φαινομένων. Κι όμως, μόνο λίγες μέθοδοι είναι γνωστές για την παραγωγή fractal συνόλων.

Η πρώτη μου επαφή με τη μορφοκλασματική γεωμετρία έγινε όταν επισκέφθηκε το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών ο William Anderson, Καθηγητής πιθανοτήτων στο Πανεπιστήμιο Mc Gill του Καναδά και ο οποίος έδωσε τρεις διαλέξεις με θέμα τα πολυσχιδή τον Οκτώβριο του 1990. Ύστερα από την παρακολούθηση των παραπάνω διαλέξεων προσπάθησα να βρω ένα συναφές θέμα στα πλαίσια της διπλωματικής εργασίας για την απόκτηση του Ενδεικτικού Πληροφορικής και Επιχειρησιακής Έρευνας. Σ' αυτό το σημείο πρωταρχική ήταν η συμβολή του Επίκουρου Καθηγητή του Τμήματος Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Αθηνών Αλέξανδρου Μπέμ, όσον αφορά στην ανάθεση της μελέτης και τις υποδείξεις του για την ολοκλήρωσή της, πράγμα για το οποίο και τον ευχαριστώ.

Όσον αφορά στη δομή της όλης αυτής εργασίας, προσπάθησα για την όσο το δυνατόν απλούστερη παρουσίαση των διαφόρων εννοιών και για την ισομερή κατανομή θεωρίας και εφαρμογών.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια μικρή αναφορά στους μετρικούς χώρους και σε ωρισμένες τοπολογικές έννοιες, ενώ στη συνέχεια ορίζουμε κάποιους ενδιαφέροντες μετασχηματισμούς, όπως τα επαναλαμβανόμενα συστήματα συναρτήσεων (ΕΣΣ), οι οποίοι αποτελούν τη γέφυρα μεταξύ των φυσικών φαινομένων και της αναπαράστασής τους στην οθόνη ενός υπολογιστή.

Το δεύτερο κεφάλαιο ανιχνεύει τη σχέση των ΕΣΣ με τα χαοτικά δυναμικά συστήματα, αλλά τα τελευταία αντιμετωπίζονται και ως ξεχωριστές οντότητες.

Το παράρτημα, περιέχει τη βασική μονάδα με την οποία συνεργάζονται τα περισσότερα προγράμματα της μελέτης αυτής, καθώς και εικόνες οι οποίες αποτελούν το κυρίως αποτέλεσμα της όλης αυτής εργασίας.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης την Αναπληρωτή Καθηγήτρια του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών Λεώνη Δάλλα για τη συμβολή της τόσο σε θέματα υποβάθρου, διότι αφιέρωσε τον πολύτιμο χρόνο της για να μου εξηγήσει αρκετά πράγματα θεωρίας μέτρου και άλλων θεμάτων, όσο και για το διάβασμα της μελέτης αυτής, καθώς επίσης και τους συναδέλφους Αλεξία Μπίντζιου, η οποία μου προσέφερε αρκετές νέες δημοσιεύσεις πάνω στο θέμα αυτό και Απόστολο Κάκο ο οποίος ανέλαβε τη φωτογράφιση ωρισμένων εικόνων.

Η όλη μελέτη γράφηκε εξ' ολοκλήρου στον Τομέα Θεωρητικής Πληροφορικής του Τμήματος Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Αθηνών με τη βοήθεια ενός υπολογιστή DFI 486-25/33 UCB και ενός εκτυπωτή Hewlett Packard Laserjet III, ενώ τα προγράμματα είναι γραμμένα σε Turbo Pascal Ver 6.0.

Ο συγγραφέας  
Β.Π.Δ

Αθήνα, Αύγουστος 1992



# Εισαγωγή

Δύο είναι τα βασικά ερωτήματα που δημιουργούνται όταν αναφέρει κανείς τις έννοιες 'πολυσχιδή' ή 'fractal σύνολα'. Το πρώτο είναι «Τι είναι τα πολυσχιδή;» και το δεύτερο «Σε τι χρησιμεύουν τα πολυσχιδή;». Ας ξεκινήσουμε λοιπόν απαντώντας στην πρώτη ερώτηση.

Σχεδιάστε μια ευθεία σε ένα κομμάτι χαρτιού. Η Ευκλείδεια γεωμετρία μας λέει ότι αυτή είναι μια εικόνα μίας διάστασης και συγκεκριμένα του μήκους. Τώρα επεκτείνετε την ευθεία. Στρέψτε τη γύρω γύρω, πίσω, εμπρός χωρίς να διασταυρώνονται οι γραμμές, μέχρις ότου γεμίσει όλο το χαρτί. Η Ευκλείδεια γεωμετρία λέει ότι αυτό είναι ακόμα ευθεία, μια μονοδιάστατη εικόνα. Αλλά η διαίσθησή μας μας λέει ότι αν η ευθεία γεμίσει πλήρως όλο το επίπεδο, θα πρέπει να είναι διδιάστατη. Έτσι ξεκίνησε μια επανάσταση στα μαθηματικά πριν από εκατό περίπου χρόνια.

Μαθηματικοί όπως οι Cantor, von Koch, Peano, Hausdorff και Besicovitch, σχεδίασαν κάποιες καμπύλες, οι οποίες ονομάστηκαν «τέρατα», «ψυχωτικές» και «παθολογικές». Προτάθηκε ένα νέο είδος διάστασης, κατά την οποία μια καμπύλη θα μπορούσε να έχει ρητή (κλασματική) διάσταση, δηλαδή όχι μόνο έναν ακέραιο αριθμό. Ανακαλύφθηκαν αναδρομικές τεχνικές και επαναλαμβανόμενες εκφράσεις, οι οποίες μπορούν να περιγράψουν καμπύλες οι οποίες έχουν κλασματική διάσταση. Αλλά χωρίς υψηλής ταχύτητας ψηφιακούς υπολογιστές, ο σχεδιασμός τέτοιων καμπύλων ήταν μια χρονοβόρα και επίπονη διεργασία. Έτσι δεν είχαμε σχεδόν καμία εξέλιξη σ' αυτόν τον κάπως ασυνήθιστο τομέα.

Η εμφάνιση όμως των ψηφιακών υπολογιστών έκανε τη διερεύνηση τέτοιων καμπύλων γόνιμο προς έρευνα έδαφος. Οι υπολογιστές εστράφηκαν στην επίλυση πολύ απλών μαθηματικών επαναλαμβανόμενων εκφράσεων, κατά τις οποίες η επόμενη κατάσταση μιας παραμέτρου εξαρτάται μόνο από μια απλή σχέση προς την τρέχουσα κατάσταση της παραμέτρου. Ο Dr. Benoit Mandelbrot ήταν το πρώτο άτομο που έκανε χρήση ενός ψηφιακού υπολογιστή για μια σε βάθος διερεύνηση των πολυσχιδών και τα αποτελέσματά του δεν έτυχαν θερμής υποδοχής από τους κατά παράδοση μαθηματικούς.

Το να εξηγήσει κανείς τη χρήση των πολυσχιδών είναι κάπως δυσκολότερο. Ο Mandelbrot ισχυρίζεται ότι, όπως τα σχήματα της παραδοσιακής γεωμετρίας είναι ο φυσικός τρόπος αναπαράστασης ανθρώπινων κατασκευασμάτων (τετραγώνων, κύ-

κλων, τριγώνων κ.λ.π), έτσι και οι μορφοκλασματικές καμπύλες είναι ο φυσικός τρόπος αναπαράστασης αντικειμένων που εμφανίζονται στη φύση. Έτσι τα πολυσχιδή έχουν διπλή αξία, ως καλλιτεχνικά αντικείμενα και ως ένας τρόπος αναπαράστασης φυσικών σκηνών. Περαιτέρω, τα πολυσχιδή εμφανίζονται εκ του φυσικού στις εκφράσεις μαθηματικών φαινομένων, όπως στην πρόβλεψη καιρικών συστημάτων και στην αύξηση ή μείωση των πληθυσμών. Επίσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη βιολογία, γεωγραφία και ιδιαίτερος στα γραφικά με υπολογιστή ως μέσο συμπίεσης γραφικών δεδομένων (εικόνων) για μετάδοση και ανακατασκευή δεδομένων.

Αγνοώντας λοιπόν την καλλιτεχνική αξία, η καλύτερη απάντηση στην ερώτηση «Σε τι χρησιμεύουν τα πολυσχιδή;» είναι η εξής: «Τα πολυσχιδή φαίνεται να δίνουν λύσεις σε πολλά μέχρι πρότινος αναπάντητα προβλήματα εντός των ορίων των φυσικών επιστημών».

Αυτό που ήταν δύσκολο να αποφασισθεί, ήταν το, σε ποιούς χώρους πρέπει να μελετήσουμε τα πολυσχιδή. Πιστεύουμε ότι οι μετρικοί χώροι είναι αυστηρώς και διαισθητικώς ευπρόσιτοι, ενώ κρύβουν επίσης και πολλές εκπλήξεις. Εκεί μελετούμε τα πολυσχιδή. Οι έννοιες που εισάγονται περιλαμβάνουν συμπάγεια, σύγκλιση, πληρότητα, συνεκτικότητα και ισοδυναμία μετρικών χώρων. Το πιο ενδιαφέρον από αυτά είναι ένας μετρικός χώρος, συμβολιζόμενος με  $\mathbb{H}$ , του οποίου στοιχεία είναι τα μη κενά συμπαγή υποσύνολα ενός μετρικού χώρου. Κάτω από τις κατάλληλες συνθήκες αυτός ο χώρος είναι πλήρης, οι βασικές ακολουθίες συγκλίνουν και μέσα σ' αυτόν μπορεί να βρει κανείς πολυσχιδή.

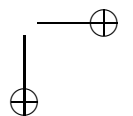
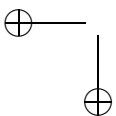
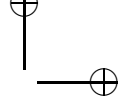
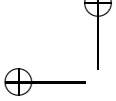
Οι μετασχηματισμοί σε μετρικούς χώρους έχουν κι αυτοί τη σημασία τους. Χωρίς, π.χ. τις απεικονίσεις συστολής, θα ήταν αδύνατη η μοντελοποίηση φυσικών αντικειμένων, αφού αυτές είναι που συστέλλουν ένα φυσικό αντικείμενο και έτσι μπορούμε να το αναπαραστήσουμε στην οθόνη του υπολογιστή μας. Ανακαλύπτονται πολυσχιδή ως σταθερά σημεία ωρισμένων απεικονίσεων μεταξύ συνόλων. Μαθαίνουμε πως μπορούν να παραχθούν τα πολυσχιδή κατά την εφαρμογή απλών μετασχηματισμών σε απλούς χώρους παρ' όλο που αυτοί είναι γεωμετρικώς πολύπλοκοι. Εξηγούμε τι είναι ένα επαναλαμβανόμενο σύστημα συναρτήσεων (ΕΣΣ) και πώς μπορεί να ορίσει ένα πολυσχιδές. Τα ΕΣΣ αποτελούν ένα κατάλληλο πλαίσιο για την περιγραφή, ταξινόμηση και επικοινωνία των πολυσχιδών. Παρουσιάζονται δύο εκδόσεις του Αιτιοκρατικού Αλγορίθμου για σχεδιασμό εικόνων πολυσχιδών. Αφού ασχοληθούμε με τη μοντελοποίηση διαφόρων ειδών δένδρων, στρεφόμαστε στο αντίστροφο πρόβλημα. Δοθέντος ενός συμπαγούς μορφοκλασματικού υποσυνόλου, πως μπορούμε να βρούμε μια κατάλληλη μορφοκλασματική προσέγγιση προς αυτό; Ένα μέρος της απάντησης δίνεται από το Θεώρημα αλληλοεπικάλυψης.

Στη συνέχεια εξετάζουμε τη δυναμική των πολυσχιδών. Αναπτύσσεται η ιδέα της διευθυνσιοδότησης των σημείων σε ωρισμένα πολυσχιδή. Εισάγονται τα δυναμικά συστήματα σε μετρικούς χώρους. Περιγράφονται οι ιδέες των τροχιών, απωστικών και ελκυστικών κύκλων. Κάνουμε μια εισαγωγή στα σύνολα Julia, τα οποία είναι αι-

τιοκρατικά πολυσχιδή και προκύπτουν από την επανάληψη αναλυτικών συναρτήσεων. Ο αντικειμενικός στόχος είναι το να δείξουμε στον αναγνώστη να καταλάβει αυτά τα πολυσχιδή χρησιμοποιώντας τις ιδέες των προηγούμενων παραγράφων. Ορίζουμε το σύνολο Mandelbrot και εξερευνούμε τρία παραδείγματα, περιλαμβάνοντας και αυτό που ανακαλύφθηκε από τον Mandelbrot. Περιγράφονται τεχνικές γραφικών για παραγωγή εικόνων αυτών των συνόλων και τέλος αναφέρονται ωρισμένα θεωρήματα από τα οποία προκύπτει ένας ισοδύναμος ορισμός του συνόλου Mandelbrot και δείχνει τη σχέση του με τα σύνολα Julia.

Στην αιτιοκρατική γεωμετρία δομές, ορίζονται, επικοινωνούν και αναλύονται με τη βοήθεια στοιχειωδών μετασχηματισμών όπως ομοπαράλληλοι μετασχηματισμοί, κλιμακώσεις και περιστροφές.

Ένα μορφοκλασματικό σύνολο περιέχει γενικώς απείρως πολλά σημεία των οποίων η οργάνωση είναι τόσο πολύπλοκη, ώστε δεν είναι δυνατή η περιγραφή του συνόλου μόνο με τον άμεσο καθορισμό της τοποθεσίας που βρίσκεται το κάθε σημείο. Αντί αυτού το σύνολο μπορεί να καθορισθεί από τις σχέσεις μεταξύ των ομοίων κομματιών που το απαρτίζουν.



# Κεφάλαιο 1

## Ο χώρος των πολυσχιδών

### 1.1 Μετρικοί χώροι

**Ορισμός 1.1.1** Έστωσαν  $X$  ένα μη κενό σύνολο και  $\rho$  μία πραγματικών τιμών συνάρτηση, η οποία ορίζεται στο γινόμενο  $X \times X$ , δηλαδή είναι  $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε

$$(i) \quad \rho(x, y) \geq 0$$

και

$$\rho(x, y) = 0, \text{ αν } x = y$$

$$(ii) \quad \rho(x, y) = \rho(y, x) \text{ (συμμετρία)}$$

$$(iii) \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \text{ (τριγωνική ανισότητα)}$$

όπου  $x, y, z \in X$ . Μια τέτοια συνάρτηση  $\rho$  λέγεται ημιμετρική ή ψευδομετρική και το  $X$  μαζί με τη  $\rho$  γραμμένο ως  $(X, \rho)$  καλείται ημιμετρικός ή ψευδομετρικός χώρος.

Αν η  $\rho$  ικανοποιεί μόνο τα αξιώματα (i) και (iii), τότε η  $\rho$  καλείται σχεδόν μετρική και το  $(X, \rho)$  σχεδόν μετρικός χώρος.

Αν επιπροσθέτως

$$\rho(x, y) = 0 \text{ τότε και μόνο, αν } x = y \text{ (ταυτότητα)}$$

τότε η  $\rho$  λέγεται ότι είναι μια μετρική ή απόσταση και το  $X$  μαζί με τη  $\rho$  καλείται μετρικός χώρος. Τα στοιχεία του  $X$  καλούνται σημεία.

Αν  $(X, \rho)$  είναι ένας μετρικός χώρος και  $Y \subset X$  είναι ένα υποσύνολο, τότε ο  $(Y, \bar{\rho})$  είναι επίσης ένας μετρικός χώρος, όπου  $\bar{\rho}: Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  είναι ένας περιορισμός της απεικόνισης  $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ . Η μετρική άνω του  $Y$  λέγεται ότι επάγεται (ή κληρονομείται) από τη μετρική άνω του  $X$ , και ο  $Y$  λέγεται ότι είναι ένας υπόχωρος του μετρικού χώρου  $X$ .

**Θεώρημα 1.1.1** Το  $(\mathbb{R}, \rho)$  είναι ένας μετρικός χώρος, όπου  $\rho$  είναι η συνάρτηση η οποία ορίζεται απ' την αντιστοιχία

$$\rho(x, y) = |x - y|,$$

για  $x, y \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Θεώρημα 1.1.2** Έστω ότι δίνονται οι μετρικοί χώροι  $(X_1, \sigma_1), (X_2, \sigma_2), \dots, (X_n, \sigma_n)$  και θέσατε

$$X = \prod_{i=1}^n X_i.$$

Για κάθε ζεύγος σημείων  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X$  και για  $1 \leq p < \infty$ , έστω  $\rho_p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  η συνάρτηση η οποία ορίζεται απ' την αντιστοιχία

$$\rho_p(x, y) = \left[ \sum_{i=1}^n \sigma_i^p(x_i, y_i) \right]^{1/p}.$$

Τότε το  $(X, \rho_p)$  είναι ένας μετρικός χώρος.

*Απόδειξη.* Με  $x$  και  $y$  όπως προηγουμένως,  $\sigma_i(x_i, y_i) \geq 0$  για  $1 \leq i \leq n$  και γι' αυτόν τον λόγο  $\rho_p(x, y) \geq 0$ . Αν  $\rho_p(x, y) = 0$ , τότε  $\sigma_i(x_i, y_i) = 0$  για  $1 \leq i \leq n$  και επομένως  $x_i = y_i$  για κάθε  $i$ . Συνεπώς,  $x = y$ . Αντιστρόφως, αν  $x = y$ , τότε  $\sigma_i(x_i, y_i) = 0$  για κάθε  $i$  και  $\rho_p(x, y) = 0$ . Αφού  $\sigma_i(x_i, y_i) = \sigma_i(y_i, x_i)$  για  $1 \leq i \leq n$ ,  $\rho_p(x, y) = \rho_p(y, x)$ . Τελικώς, έστω  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in X$ . Τότε

$$\begin{aligned} \rho_p(x, y) &= \left[ \sum_{i=1}^n \sigma_i^p(x_i, y_i) \right]^{1/p} \\ &\leq \left[ \sum_{i=1}^n [\sigma_i(x_i, z_i) + \sigma_i(z_i, y_i)]^p \right]^{1/p} \\ &\leq \left[ \sum_{i=1}^n \sigma_i^p(x_i, z_i) \right]^{1/p} + \left[ \sum_{i=1}^n \sigma_i^p(z_i, y_i) \right]^{1/p} \quad (\text{ανισότητα Minkowski}) \\ &= \rho_p(x, z) + \rho_p(z, y). \quad \square \end{aligned}$$

**Πόρισμα 1.1.1** Το  $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$  για  $1 \leq p < \infty$  και  $n = 1, 2, \dots$  είναι ένας μετρικός χώρος, όπου  $\rho_p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι η συνάρτηση η οποία ορίζεται απ' την αντιστοιχία

$$\rho_p(x, y) = \left[ \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right]^{1/p},$$

για  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . Τον μετρικό χώρο  $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$  τον συμβολίζουμε με  $\ell_n^p$ . Για  $p = 2$  ο  $\ell_n^2$  είναι ο  $n$ -διάστατος Ευκλείδειος χώρος.  $\square$

**Θεώρημα 1.1.3** Έστω ότι δίνονται οι μετρικοί χώροι  $(X_1, \sigma_1), (X_2, \sigma_2), \dots, (X_n, \sigma_n)$  και θέσατε

$$X = \prod_{i=1}^n X_i.$$

Για κάθε ζεύγος σημείων  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X$  έστω  $\rho_\infty: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  η συνάρτηση η οποία ορίζεται απ' την αντιστοιχία

$$\rho_\infty(x, y) = \max\{\sigma_i(x_i, y_i) : 1 \leq i \leq n\}.$$

Τότε το  $(X, \rho_\infty)$  είναι ένας μετρικός χώρος.

*Απόδειξη.* Με  $x$  και  $y$  όπως προηγουμένως,  $\sigma_i(x_i, y_i) \geq 0$  για  $1 \leq i \leq n$  και γι' αυτόν τον λόγο  $\rho_\infty(x, y) \geq 0$ . Αν  $\rho_\infty(x, y) = 0$ , τότε  $\sigma_i(x_i, y_i) = 0$  για  $1 \leq i \leq n$  και επομένως  $x_i = y_i$  για κάθε  $i$ . Συνεπώς,  $x = y$ . Αντιστρόφως, αν  $x = y$ , τότε  $\sigma_i(x_i, y_i) = 0$  για κάθε  $i$  και  $\rho_\infty(x, y) = 0$ . Αφού  $\sigma_i(x_i, y_i) = \sigma_i(y_i, x_i)$  για  $1 \leq i \leq n$ ,  $\rho_\infty(x, y) = \rho_\infty(y, x)$ . Τελικώς, έστω  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in X$ . Έστω ότι  $j$  και  $k$  είναι ακέραιοι τέτοιοι, ώστε  $\rho_\infty(x, z) = \sigma_j(x_j, z_j)$  και  $\rho_\infty(z, y) = \sigma_k(z_k, y_k)$ . Έτσι, για  $1 \leq i \leq n$ ,  $\sigma_i(x_i, z_i) \leq \sigma_j(x_j, z_j)$ ,  $\sigma_i(z_i, y_i) \leq \sigma_k(z_k, y_k)$  και  $\sigma_i(x_i, y_i) \leq \sigma_i(x_i, z_i) + \sigma_i(z_i, y_i) \leq \sigma_j(x_j, z_j) + \sigma_k(z_k, y_k) = \rho_\infty(x, z) + \rho_\infty(z, y)$ . Επομένως

$$\rho_\infty(x, y) = \max\{\sigma_i(x_i, y_i) : 1 \leq i \leq n\} \leq \rho_\infty(x, z) + \rho_\infty(z, y). \quad \square$$

**Πόρισμα 1.1.2** Το  $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$  είναι ένας μετρικός χώρος, όπου  $\rho_\infty: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι η συνάρτηση η οποία ορίζεται απ' την αντιστοιχία

$$\rho_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\},$$

για  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Παραδείγματα.**

1. Έστω  $X$  ένα αυθαίρετο σύνολο. Θέτουμε

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = y \\ 1, & \text{αν } x \neq y \end{cases}$$

για κάθε  $x, y \in X$ . Είναι προφανές ότι η  $\rho$  είναι μετρική στο  $X$ . Η μετρική αυτή είναι η διακριτική μετρική.  $\square$

2. Έστω ότι  $(X, \rho)$  είναι ένας μετρικός χώρος. Θέτουμε  $\sigma(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$  για κάθε  $x, y \in X$ . Τότε η  $\sigma$  είναι μετρική στον  $X$ .  $\square$

**Ορισμός 1.1.2** Έστωσαν  $(X, \rho)$  ένας μετρικός χώρος,  $x \in X$  και  $\varepsilon$  ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Το σύνολο

$$S(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$$

καλείται ανοικτή σφαίρα κέντρου  $x$  και ακτίνας  $\varepsilon$  (ως προς τη μετρική  $\rho$ ) και το σύνολο

$$K(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) \leq \varepsilon\}$$

καλείται κλειστή σφαίρα κέντρου  $x$  και ακτίνας  $\varepsilon$  (ως προς τη μετρική  $\rho$ ).

**Ορισμός 1.1.3** Έστω  $M$  ένας μετρικός χώρος ο οποίος αποτελείται από ένα σύνολο  $X$  και μια μετρική  $\rho$  υπεράνω του  $X$ . Αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός  $k > 0$  τέτοιος, ώστε  $\rho(x, y) \leq k$  για κάθε ζεύγος σημείων  $x$  και  $y$  του  $X$ , λέμε ότι ο  $M$  είναι ένας φραγμένος μετρικός χώρος. Ένας μετρικός χώρος ο οποίος δεν είναι φραγμένος λέγεται ότι είναι μη φραγμένος. Σ' αυτήν την περίπτωση η  $\rho(x, y)$  παίρνει τιμές όσο θέλουμε μεγάλες.

Ένα υποσύνολο  $A$  ενός μετρικού χώρου  $(X, \rho)$  λέγεται ότι είναι φραγμένο, εάν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός  $r > 0$  τέτοιος, ώστε  $\rho(x, y) \leq r$  για κάθε  $x, y \in A$ . Συνεπώς το  $A$  είναι φραγμένο, αν  $A \subset S(X, r)$  για κάποιο  $r > 0$  και κάποιο  $x$  στο  $X$ .

Αν ο μετρικός χώρος  $M$  ο οποίος αποτελείται από ένα σύνολο  $X$  με μετρική  $\rho$  είναι μη φραγμένος, μπορούμε να ορίσουμε με πολλούς τρόπους έναν φραγμένο μετρικό χώρο  $M$  ο οποίος να αποτελείται από το ίδιο σύνολο  $X$  με μια διαφορετική μετρική.

**Θεώρημα 1.1.4** Έστω  $(X, \rho)$  ένας μετρικός χώρος. Θέτουμε

$$\rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$

για κάθε  $x, y \in X$ . Τότε το  $(X, \rho_1)$  είναι επίσης ένας μετρικός χώρος ο οποίος είναι φραγμένος.



Απόδειξη. Έστω  $x, y \in X$ . Αφού  $\rho(x, y) \geq 0$  έχουμε ότι  $\rho_1(x, y) \geq 0$ . Αν

$$\rho_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)} = 0 \Leftrightarrow \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Αφού

$$\rho(x, y) = \rho(y, x) \Leftrightarrow \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)} = \frac{\rho(y, x)}{1 + \rho(y, x)} \Leftrightarrow \rho_1(x, y) = \rho_1(y, x).$$

Τελικώς, έστω  $z \in X$ . Τότε

$$\begin{aligned} \rho_1(x, y) &= \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{\rho(x, y)}} \\ &\leq \frac{1}{1 + \frac{1}{\rho(x, z) + \rho(z, y)}} &= \frac{\rho(x, z) + \rho(z, y)}{1 + \rho(x, z) + \rho(z, y)} \\ &\leq \frac{\rho(x, z)}{1 + \rho(x, z)} + \frac{\rho(z, y)}{1 + \rho(z, y)} &= \rho_1(x, z) + \rho_1(z, y). \end{aligned}$$

Αφού  $0 \leq \rho_1(x, y) \leq 1$ , ο  $(X, \rho_1)$  είναι ένας φραγμένος μετρικός χώρος.  $\square$

**Ορισμός 1.1.4** Έστω  $A$  ένα σύνολο πραγματικών αριθμών. Ένας αριθμός  $b$  καλείται ένα άνω φράγμα του  $A$ , αν  $x \leq b$  για κάθε  $x \in A$ . Ένας αριθμός  $c$  καλείται ένα κάτω φράγμα του  $A$ , αν  $c \leq x$  για κάθε  $x \in A$ . Αν το  $A$  έχει άνω και κάτω φράγμα, τότε λέγεται ότι είναι φραγμένο.

Ένα άνω φράγμα  $b^*$  του  $A$  καλείται ελάχιστο άνω φράγμα ή supremum του  $A$ , αν για κάθε άνω φράγμα  $b$  του  $A$ , ισχύει  $b^* \leq b$ .

Ένα κάτω φράγμα  $c^*$  του  $A$  καλείται μέγιστο κάτω φράγμα ή infimum του  $A$ , αν για κάθε κάτω φράγμα  $c$  του  $A$ , ισχύει  $c \leq c^*$ .

**Ορισμός 1.1.5** Έστω  $(X, \rho)$  ένας μετρικός χώρος και  $\emptyset \neq A \subset X$ . Η ποσότητα

$$\text{διαμ}(A) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\}$$

λέγεται διάμετρος του  $A$ .

Προφανώς ένα υποσύνολο  $A$  ενός μετρικού χώρου είναι φραγμένο τότε και μόνο, αν  $\text{διαμ}(A) < \infty$ .

**Ορισμός 1.1.6** Έστω  $(X, \rho)$  ένας μετρικός χώρος και  $\emptyset \neq A, B \subset X$ . Το σύνολο των πραγματικών αριθμών  $\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\}$  είναι φραγμένο κάτω από το μηδέν. Το μέγιστο κάτω φράγμα του, καλείται απόσταση μεταξύ του  $A$  και του  $B$  και συμβολίζεται με  $d(A, B)$ . Αν  $A = \{x\}$ , τότε  $d(x, B) = \inf\{\rho(x, y) : y \in B\}$ , το οποίο καλείται απόσταση μεταξύ του  $x$  και του  $B$ .

**Ορισμός 1.1.7** Έστω  $(X, \rho)$  ένας μετρικός χώρος και  $A \subset X$ . Το  $A$  είναι ανοιχτό (ως προς τη μετρική  $\rho$ ), αν για κάθε  $x \in A$  υπάρχει  $\varepsilon > 0$ , ώστε  $S(x, \varepsilon) \subset A$ . Το  $A$  είναι κλειστό (ως προς τη μετρική  $\rho$ ), αν το  $X \setminus A$  είναι ανοιχτό.

**Πρόταση 1.1.1** Έστω  $(X, \rho)$  ένας μετρικός χώρος και  $\mathbb{F}(X)$  η οικογένεια όλων των μη κενών κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων του  $X$ . Για κάθε  $A, B \in \mathbb{F}(X)$  θέτουμε

$$h(A, B) = \max\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{x \in B} d(x, A)\}.$$

Τότε η  $h$  είναι μια μετρική άνω του  $\mathbb{F}(X)$  (Η  $h$  είναι η μετρική Hausdorff).

Απόδειξη. Έστω  $A, B \in \mathbb{F}(X)$ . Θέτουμε

$$d_{AB} = \sup\{d(x, A) : x \in B\} \text{ και } d_{BA} = \sup\{d(x, B) : x \in A\},$$

τα οποία ελάχιστα άνω φράγματα έχουν έννοια, αφού τα  $A, B$  είναι φραγμένα.

Προφανώς  $h(A, B) \geq 0$ . Αν

$$\begin{aligned} h(A, B) = 0 &\Leftrightarrow \max\{d_{AB}, d_{BA}\} = 0 \\ &\Leftrightarrow d_{AB} = 0 = d_{BA} \\ &\Leftrightarrow \sup\{d(x, A) : x \in B\} = 0 \text{ και } \sup\{d(x, B) : x \in A\} = 0 \\ &\Leftrightarrow d(x, A) = 0, \forall x \in B \text{ και } d(x, B) = 0, \forall x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A}, \forall x \in B \text{ και } x \in \overline{B}, \forall x \in A \\ &\Leftrightarrow B \subset \overline{A} = A \text{ και } A \subset \overline{B} = B \\ &\Leftrightarrow A = B. \end{aligned}$$

Επίσης

$$h(A, B) = \max\{d_{AB}, d_{BA}\} = \max\{d_{BA}, d_{AB}\} = h(B, A).$$

Τελικώς, έστω  $C \in \mathbb{F}(X)$  και  $c \in C$ . Από τον Ορισμό 1.1.6 για τις  $d(x, B)$  και  $d(x, A)$  προκύπτει ότι, αν  $x$  είναι ένα δοθέν σημείο του  $X$ , τότε για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχουν, ένα σημείο  $b \in B$  και ένα σημείο  $a \in A$  τέτοια, ώστε

$$\rho(x, b) < d(x, B) + \varepsilon, \quad \rho(x, a) < d(x, A) + \varepsilon.$$

Όμως,

$$\begin{aligned} \rho(x, a) &\leq \rho(x, b) + \rho(b, a) < d(x, B) + \varepsilon + d(b, A) + \varepsilon = d(x, B) + d(b, A) + 2\varepsilon \\ \Rightarrow d(x, A) &\leq \rho(x, a) < d(x, B) + d(b, A) + 2\varepsilon \\ &\leq d(x, B) + \sup\{d(b, A) : b \in B\} + 2\varepsilon = d(x, B) + d_{AB} + 2\varepsilon \\ \Rightarrow d(x, A) &< d(x, B) + d_{AB} + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} d(c, A) &< d(c, B) + d_{AB} + 2\varepsilon \\ \Rightarrow \sup\{d(c, A) : c \in C\} &< \sup\{d(c, B) : c \in C\} + d_{AB} + 2\varepsilon \\ \Rightarrow d_{AC} &< d_{BC} + d_{AB} + 2\varepsilon \end{aligned}$$

δηλαδή

$$d_{AC} \leq d_{AB} + d_{BC},$$

ενώ ομοίως προκύπτει ότι

$$d_{CA} \leq d_{CB} + d_{BA}.$$

Τότε, αφού  $h(A, C) = \max\{d_{AC}, d_{CA}\}$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} h(A, C) &= d_{AC} \leq d_{AB} + d_{BC} \leq \max\{d_{AB}, d_{BA}\} + \max\{d_{BC}, d_{CB}\} \\ &= h(A, B) + h(B, C) \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} h(A, C) &= d_{CA} \leq d_{CB} + d_{BA} \leq \max\{d_{CB}, d_{BC}\} + \max\{d_{AB}, d_{BA}\} \\ &= h(B, C) + h(A, B), \end{aligned}$$

δηλαδή σε κάθε περίπτωση η  $h$  είναι μια μετρική άνω του  $X$ .  $\square$

**Ορισμός 1.1.8** Μια ακολουθία σημείων  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  σε έναν μετρικό χώρο  $(X, \rho)$  λέγεται ότι συγκλίνει προς ένα σημείο  $x \in X$  (ως προς τη μετρική  $\rho$ ), αν για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  έτσι, ώστε  $\rho(x_n, x) < \varepsilon$  για κάθε  $n \geq n_0$ .

Το σημείο  $x$  καλείται το όριο της ακολουθίας και γράφουμε  $\lim_n x_n = x$  ή  $x_n \rightarrow x$ .

Λέμε, το όριο διότι καμιά ακολουθία εντός ενός μετρικού χώρου δεν μπορεί να συγκλίνει προς δύο όρια.

**Πρόταση 1.1.2** Έστω  $(X, \rho)$  ένας μετρικός χώρος και  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  ακολουθία σημείων στον  $X$ . Αν  $x_n \rightarrow x$  και  $x_n \rightarrow y$ , τότε  $x = y$ .

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι  $x \neq y$  και θέτουμε  $\varepsilon = \rho(x, y)/2 > 0$ . Τότε υπάρχουν  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  ώστε  $\rho(x_n, x) < \varepsilon, \forall n \geq n_1$  και  $\rho(x_n, y) < \varepsilon, \forall n \geq n_2$ . Θέτουμε  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ . Αν  $n \geq n_0$ , τότε

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x) + \rho(x, y) < 2\varepsilon = \rho(x, y),$$

άτοπο.  $\square$

**Ορισμός 1.1.9** Έστω  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  μια ακολουθία σημείων ενός συνόλου  $X$ . Αν  $(k_n)_{n=1}^{\infty}$  είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων έτσι, ώστε  $k_n \geq n$  και  $k_n \rightarrow \infty$  καθώς  $n \rightarrow \infty$ , η ακολουθία  $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$  καλείται υπακολουθία της  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  και αν  $x_n \rightarrow x$ , τότε  $x_{k_n} \rightarrow x$ . Δηλαδή, αν  $x: \mathbb{N} \rightarrow X$  είναι μια ακολουθία στο  $X$ , μια υπακολουθία της  $x$  ορίζεται από μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  και είναι η ακολουθία  $x \circ \varphi: \mathbb{N} \rightarrow X$ .

**Ορισμός 1.1.10** Μια συνάρτηση  $f: X \rightarrow Y$  από έναν μετρικό χώρο  $(X, \rho)$  εντός ενός μετρικού χώρου  $(Y, \sigma)$  είναι συνεχής (ως προς τις μετρικές  $\rho, \sigma$ ) στο σημείο  $x_0 \in X$ , αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει ένα  $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$  τέτοιο, ώστε για κάθε  $x \in X$  με  $\rho(x_0, x) < \delta$  να ισχύει  $\sigma(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ .

Η συνάρτηση  $f: X \rightarrow Y$  λέγεται ότι είναι συνεχής, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $X$ .

### Παράδειγμα

3. Έστω  $D$  το σύνολο όλων των μη φθινουσών, εκ δεξιών συνεχών συναρτήσεων  $f$  οι οποίες ορίζονται άνω του  $\mathbb{R}$  με  $0 \leq f \leq 1$ . Υποθέστε ότι για  $f, g \in D$

$$\rho(f, g) = \inf\{\delta > 0 : f(x - \delta) - \delta \leq g(x) \leq f(x + \delta) + \delta \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}\}.$$

Τότε η  $\rho$  είναι μετρική άνω του  $D$ . [Αυτή η μετρική (χρήσιμη στη θεωρία πιθανοτήτων) καλείται μετρική Lèvy, η οποία πήρε το όνομά της από τον μεγάλο Γάλλο πιθανοθεωρητικό Paul Lèvy].

(Απάντηση. Για κάθε  $f, g \in D$  θέτουμε

$$A(f, g) = \{\delta > 0 : f(x - \delta) - \delta \leq g(x) \leq f(x + \delta) + \delta \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}\}.$$

Παρατηρούμε ότι  $A(f, g) \neq \emptyset$  (διότι  $1 \in A(f, g)$ ) και άρα η  $\rho$  είναι καλώς ωρισμένη. Επίσης αν  $\delta \in A(f, g)$ , τότε  $\delta' \in A(f, g)$  για κάθε  $\delta' > \delta$ . Είναι τώρα εύκολο να δούμε ότι αν  $\rho(f, g) = 0$ , τότε  $A(f, g) = (0, +\infty)$  και άρα  $g(x) \leq f(x + \delta) + \delta$  και  $f(x) - \delta \leq g(x - \delta)$  για κάθε  $\delta > 0$  και  $x \in \mathbb{R}$ . Παίρνοντας το όριο όταν  $\delta \rightarrow 0$ , έπεται  $f(x) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}$ . Οι υπόλοιπες ιδιότητες της μετρικής αποδεικνύονται ευκόλως από τις:

$$(1) A(f, f) = (0, +\infty),$$

$$(2) A(f, g) = A(g, f) \text{ και}$$

$$(3) A(f, h) + A(h, g) \subset A(f, g)$$

$$\text{για κάθε } f, g, h \in D \text{ όπου } A(f, h) + A(h, g) = \{\delta_1 + \delta_2 : \delta_1 \in A(f, h), \delta_2 \in A(h, g)\}.$$

Αποδεικνύουμε μόνο την (3). Έστω  $\delta_1 \in A(f, h), \delta_2 \in A(h, g)$  και  $x \in \mathbb{R}$ . Τότε

$$\begin{aligned} f(x - \delta_1 - \delta_2) - \delta_1 - \delta_2 &\leq h(x - \delta_2) - \delta_2 \leq g(x) \leq h(x + \delta_2) + \delta_2 \\ &\leq f(x + \delta_1 + \delta_2) + \delta_1 + \delta_2. \end{aligned}$$

Επομένως  $\delta_1 + \delta_2 \in A(f, g)$ .  $\square$

**Θεώρημα 1.1.5** Έστωσαν  $(X, \rho)$  και  $(Y, \sigma)$  μετρικοί χώροι. Εάν  $f: X \rightarrow Y$  είναι μια σταθερή συνάρτηση, τότε η  $f$  είναι συνεχής.

Απόδειξη. Έστω δοθέντα, ένα σημείο  $x_0 \in X$  και  $\varepsilon > 0$ . Επιλέξτε οιοδήποτε  $\delta > 0$ , έστω  $\delta = 1$ . Τότε οποτεδήποτε  $\rho(x, x_0) < \delta$ , έχουμε

$$\sigma(f(x), f(x_0)) = \sigma(y_0, y_0) = 0 < \varepsilon. \quad \square$$

**Θεώρημα 1.1.6** Έστω  $(X, \rho)$  ένας μετρικός χώρος. Τότε η ταυτοτική συνάρτηση  $i: X \rightarrow X$  είναι συνεχής.  $\square$

**Ορισμός 1.1.11** Έστωσαν  $(X, \rho)$  και  $(Y, \sigma)$  μετρικοί χώροι. Μια συνάρτηση  $f: X \rightarrow Y$  είναι ομοιομορφισμός, εάν είναι 1-1, επί, συνεχής και η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  συνεχής. Αν υπάρχει ένας ομοιομορφισμός  $f: X \rightarrow Y$ , τότε οι χώροι  $X, Y$  λέγονται ομοιομορφικοί και συμβολικώς γράφουμε  $X \approx Y$ .

**Ορισμός 1.1.12** Μια συνάρτηση  $f: X \rightarrow Y$  από έναν μετρικό χώρο  $(X, \rho)$  εντός ενός μετρικού χώρου  $(Y, \sigma)$  είναι ομοιομόρφως συνεχής (ως προς τις μετρικές  $\rho, \sigma$ ), αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει ένα  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  τέτοιο, ώστε για κάθε  $x, x_1 \in X$  με  $\rho(x, x_1) < \delta$  να ισχύει  $\sigma(f(x), f(x_1)) < \varepsilon$ .

Παρατήρηση. Αν η  $f: X \rightarrow Y$  είναι ομοιομόρφως συνεχής, τότε η  $f$  είναι συνεχής.

**Ορισμός 1.1.13** Έστωσαν  $(X, \rho)$  και  $(Y, \sigma)$  μετρικοί χώροι και  $T$  μια απεικόνιση από το  $X$  εντός του  $Y$ . Τότε η  $T$  λέγεται ότι είναι Lipschitz, αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός  $M$  τέτοιος, ώστε για κάθε  $x, y$  στο  $X$  να έχουμε  $\sigma(Tx, Ty) \leq M\rho(x, y)$ . Η  $T$  λέγεται ότι είναι αδιάστατη, αν  $M = 1$  και συστολή, αν  $M < 1$ . Καλούμε την  $T$  συστολική, αν για κάθε  $x, y$  στο  $X$  και  $x \neq y$  έχουμε  $\sigma(Tx, Ty) < \rho(x, y)$ .

Παρατηρήστε ότι συστολή  $\Rightarrow$  συστολική  $\Rightarrow$  αδιάστατη  $\Rightarrow$  Lipschitz.

**Παραδείγματα**

4. Μια συστολική  $T$ , η οποία δεν είναι συστολή.

Έστω  $X = [1, \infty)$  και  $Tx = x + 1/x$ . Τότε για  $x, y \in X$  και  $x \neq y$ , έχουμε

$$\rho(Tx, Ty) = |x - y| \frac{xy - 1}{xy} < \rho(x, y).$$

Αν υπήρχε  $M < 1$  τέτοιο, ώστε

$$\rho(Tx, Ty) \leq M\rho(x, y) \Leftrightarrow \rho(x, y) \left(1 - \frac{1}{xy}\right) \leq M\rho(x, y) \Leftrightarrow M \geq 1 - \frac{1}{xy}.$$

Αφού

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{xy - 1}{xy} = 1,$$

η  $T$  δεν είναι συστολή.  $\square$

5. Μια συστολή.

Ένα απλό παράδειγμα είναι η  $Tx = x/2$  για  $x \in (-\infty, \infty)$ . Ένα πιο ενδιαφέρον παράδειγμα είναι το ακόλουθο: έστω  $X = \mathbf{C}([0, 1])$  με τη συνήθη 'sup' μετρική. Τότε η απεικόνιση  $T: X \rightarrow X$  με

$$T[f](t) = k \int_0^t f(x) dx, \quad (0 \leq t \leq 1)$$

είναι μια συστολή για  $0 < k < 1$ .  $\square$

6. Μια απεικόνιση η οποία είναι συστολή μόνο μετά από επανάληψη.

Θεωρήστε την απεικόνιση  $T: \mathbf{C}([a, b]) \rightarrow \mathbf{C}([a, b])$  (με τη 'sup' μετρική και  $-\infty < a < b < \infty$ ) με τύπο

$$T[f](t) = \int_a^t f(x) dx.$$

Τότε έχουμε

$$T^m[f](t) = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-x)^{m-1} f(x) dx.$$

Τώρα είναι σαφές ότι για αρκετά μεγάλες τιμές του  $m$  η απεικόνιση  $T$  είναι μια συστολή, ενώ η ίδια  $T$  δεν είναι απαραίτητα συστολή, αν  $b - a > 1$ .  $\square$

**Πρόταση 1.1.3** Έστωσαν  $(X, \rho)$  και  $(Y, \sigma)$  μετρικοί χώροι. Μια απεικόνιση  $T: X \rightarrow Y$  η οποία είναι φραγμένη, που σημαίνει ότι ικανοποιεί οιαδήποτε από τις προαναφερθείσες συνθήκες, δηλαδή υπάρχει  $M > 0$  ώστε  $\sigma(Tx, Ty) \leq M\rho(x, y)$  για κάθε  $x, y \in X$ , είναι ομοιομόρφως συνεχής.

*Απόδειξη.* Έστω  $\varepsilon > 0$ . Θέτουμε  $\delta = \varepsilon/M > 0$ . Αν  $x, y \in X$  ώστε  $\rho(x, y) < \delta$ , τότε

$$\sigma(T(x), T(y)) \leq M\rho(x, y) < M(\varepsilon/M) = \varepsilon.$$

Άρα η  $T$  είναι ομοιομόρφως συνεχής.  $\square$

Ο ακόλουθος ορισμός είναι ειδική περίπτωση του προηγούμενου.

**Ορισμός 1.1.14** Μια συνάρτηση  $T: X \rightarrow X$  σε έναν μετρικό χώρο  $(X, \rho)$  καλείται συστολή, αν υπάρχει  $0 \leq M < 1$  τέτοιο, ώστε  $\rho(Tx, Ty) \leq M\rho(x, y)$  για κάθε  $x, y \in X$ . Οιοσδήποτε τέτοιος αριθμός  $M$  καλείται παράγων συσταλτικότητας της  $T$ .

**Πόρισμα 1.1.3** Έστω  $(X, \rho)$  ένας μετρικός χώρος και ότι η  $T: X \rightarrow X$  είναι συστολή. Τότε η  $T$  είναι ομοιομόρφως συνεχής.  $\square$

**Πόρισμα 1.1.4** Έστω  $(X, \rho)$  ένας μετρικός χώρος. Η μετρική  $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  είναι ομοιομόρφως συνεχής συνάρτηση στον μετρικό χώρο  $(X \times X, \rho_1)$ , όπου  $\rho_1$  είναι η μετρική του Θεωρήματος 1.1.2.

Απόδειξη. Για κάθε  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$  ισχύει

$$\rho(x_1, x_2) \leq \rho(x_1, y_1) + \rho(y_1, y_2) + \rho(y_2, x_2).$$

Συνεπώς έχουμε ότι

$$\rho(x_1, x_2) - \rho(y_1, y_2) \leq \rho(x_1, y_1) + \rho(x_2, y_2).$$

Αναλόγως αποδεικνύεται ότι

$$\rho(y_1, y_2) - \rho(x_1, x_2) \leq \rho(x_1, y_1) + \rho(x_2, y_2).$$

Άρα ισχύει

$$|\rho(x_1, x_2) - \rho(y_1, y_2)| \leq \rho(x_1, y_1) + \rho(x_2, y_2) = \rho_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)).$$

Συνεπώς από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι η  $\rho$  είναι ομ. συνεχής.  $\square$

**Πόρισμα 1.1.5** Έστω  $(X, \rho)$  ένας μετρικός χώρος και  $\emptyset \neq A \subset X$ . Η συνάρτηση  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\varphi(x) = d(x, A)$  είναι ομ. συνεχής.

Απόδειξη. Έστω  $x, y \in X$ . Αν  $z \in A$ , τότε από τον Ορισμό 1.1.6 έχουμε ότι

$$d(x, A) \leq \rho(x, z).$$

Άρα

$$d(x, A) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

για κάθε  $z \in A$ . Συνεπώς

$$d(x, A) - d(y, A) \leq \rho(x, y).$$

Αναλόγως αποδεικνύεται ότι

$$d(y, A) - d(x, A) \leq \rho(x, y).$$

Άρα

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq \rho(x, y)$$

για κάθε  $x, y \in X$ .  $\square$

**Πρόταση 1.1.4** Αν  $f, g: X \rightarrow X$  είναι συναρτήσεις συστολής σε έναν μετρικό χώρο  $(X, \rho)$  με συντελεστές συστολής  $s$  και  $t$  αντιστοίχως, τότε η  $f \circ g$  είναι μια συνάρτηση συστολής με παράγοντα συσταλτικότητας  $st$ .

Απόδειξη. Για  $x, y \in X$  έχουμε

$$\rho(f(g(x)), f(g(y))) \leq s\rho(g(x), g(y)) \leq st\rho(x, y). \quad \square$$

**Ορισμός 1.1.15** Έστωσαν  $(X, \rho)$  ένας μετρικός χώρος και  $S \subset X$ . Μια συλλογή  $O$ , ανοικτών υποσυνόλων του  $X$ , λέγεται ότι είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του  $S$ , αν  $S \subset \cup_{A \in O} A$ .

Ένα  $S \subset X$  καλείται συμπαγές, αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του  $S$  έχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα.

$O(X, \rho)$  καλείται αριθμησίμως συμπαγής, αν κάθε αριθμησιμο ανοικτό κάλυμμα του  $X$  έχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα.

$O(X, \rho)$  καλείται ακολουθιακά συμπαγής, αν κάθε άπειρη ακολουθία στον  $X$  έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

**Ορισμός 1.1.16** Έστω  $(X, \rho)$  ένας μετρικός χώρος. Τότε  $\mathbb{H}(X)$  συμβολίζει τον χώρο του οποίου σημεία είναι τα συμπαγή, διαφορετικά του κενού, υποσύνολα του  $X$ , δηλαδή

$$\mathbb{H}(X) = \{\emptyset \neq A \subset X : A \text{ συμπαγές}\}.$$

Η διαφορά μεταξύ ενός υποσυνόλου του  $\mathbb{H}(X)$  και ενός μη κενού συμπαγούς υποσυνόλου του  $X$  είναι ότι, το  $\mathbb{H}(X)$  είναι ένα σύνολο συνόλων, άρα κάθε υποσύνολό του είναι ένα σύνολο συμπαγών συνόλων.

**Πρόταση 1.1.5** Έστω  $(X, \rho)$  ένας μετρικός χώρος,  $x \in X$  και  $A \in \mathbb{H}(X)$ . Τότε υπάρχει  $y \in A$  ώστε  $d(x, A) = \rho(x, y)$ .

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\varphi(y) = \rho(x, y)$  για κάθε  $y \in A$ . Από το Πρόσχημα 1.1.4 έχουμε ότι η  $\varphi$  είναι ομοιομόρφως συνεχής, άρα και συνεχής. Θέτουμε  $P = d(x, A) = \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}$ . Τότε υπάρχει ακολουθία  $(y_n)$  από στοιχεία του  $A$  ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi(y_n)| = P \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(y_n) = P,$$

διότι  $\varphi(y) \geq 0$  για κάθε  $y \in A$ . Επειδή όμως το  $A$  είναι συμπαγές, άρα και ακολουθιακά συμπαγές, η ακολουθία  $(y_n)$  περιέχει μια συγκλίνουσα, έστω σε κάποιο  $y$ , υπακολουθία. Χρησιμοποιώντας και τη συνέχεια της  $\varphi$  έχουμε ότι  $P = \varphi(y)$ , για κάποιο  $y \in A$ , δηλαδή  $d(x, A) = \rho(x, y)$  για κάποιο  $y \in A$ .  $\square$

Συμφώνως με την προηγούμενη πρόταση το σύνολο των πραγματικών αριθμών  $\{\rho(x, y) : y \in A\}$  όπου  $x \in X$  και  $A \in \mathbb{H}(X)$  έχει μια ελάχιστη τιμή οπότε προκύπτει και ο κάτωθι



**Ορισμός 1.1.17** Έστω  $(X, \rho)$  ένας μετρικός χώρος,  $x \in X$  και  $A \in \mathbb{H}(X)$ . Τότε ως απόσταση μεταξύ του  $x$  και του  $A$  θεωρούμε το  $\min\{\rho(x, y) : y \in A\}$ .

**Πρόταση 1.1.6** Έστω  $(X, \rho)$  ένας μετρικός χώρος,  $x \in X$  και  $A, B \in \mathbb{H}(X)$ . Τότε υπάρχουν  $x \in A$  και  $y \in B$  ώστε  $d(A, B) = \rho(x, y)$ .

*Απόδειξη.* Αντιστρέφοντας τους ρόλους δείχνουμε, όπως και στην Πρόταση 1.1.5, ότι υπάρχουν  $x \in A, y \in B$  ώστε  $d(A, B) = \rho(x, y)$ .  $\square$

**Ορισμός 1.1.18** Έστω  $(X, \rho)$  ένας μετρικός χώρος. Τότε η απόσταση Hausdorff μεταξύ των σημείων  $A$  και  $B$  του  $\mathbb{H}(X)$  ορίζεται από την

$$h(A, B) = \max\{\max_{x \in A} d(x, B), \max_{x \in B} d(x, A)\}.$$

**Ορισμός 1.1.19** Ένας μετρικός χώρος  $X$  καλείται ασύνδετος, αν  $X = A \cup B$ , όπου  $A$  και  $B$  είναι ξένα μη κενά ανοικτά υποσύνολα του  $X$ .

Καλούμε τον  $X$  συνεκτικό, αν δεν είναι ασύνδετος.

Ο  $X$  είναι ολικώς ασύνδετος, αν τα μόνα μη κενά συνδεδεμένα υποσύνολά του είναι μονοσύνολα.

## 1.2 Μετασχηματισμοί σε μετρικούς χώρους

**Ορισμός 1.2.1** Έστω  $(X, \rho)$  ένας μετρικός χώρος. Ένας μετασχηματισμός στον  $X$  είναι μια συνάρτηση  $f: X \rightarrow X$ , η οποία αντιστοιχεί ακριβώς ένα σημείο  $f(x) \in X$  σε κάθε σημείο  $x \in X$ .

**Ορισμός 1.2.2** Έστω  $f: X \rightarrow X$  ένας μετασχηματισμός σε έναν μετρικό χώρο. Οι έμπροσθεν επαναλήψεις του  $f$  είναι οι μετασχηματισμοί  $f^{\circ n}: X \rightarrow X$  οι οποίοι ορίζονται από τις

$$f^{\circ 0}(x) = x, f^{\circ 1}(x) = f(x), \dots, f^{\circ n}(x) = f \circ f^{\circ(n-1)}(x) = f(f^{\circ(n-1)}(x))$$

για  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Αν ο  $f$  είναι αντιστρέψιμος, τότε οι όπισθεν επαναλήψεις του  $f$  είναι οι μετασχηματισμοί  $f^{\circ(-m)}: X \rightarrow X$  οι οποίοι ορίζονται από τις

$$f^{\circ(-1)}(x) = f^{-1}(x), \dots, f^{\circ(-m)}(x) = (f^{\circ m})^{-1}(x)$$

για  $m = 1, 2, 3, \dots$

**Παραδείγματα**

1. Έστω  $f: X \rightarrow X$  ένας αντιστρέψιμος μετασχηματισμός. Δείξτε ότι

$$f^{\circ m} \circ f^{\circ n} = f^{\circ(m+n)}$$

για κάθε  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

(Απάντηση. Αν  $m, n \in \mathbb{Z}_+$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f^{\circ m} \circ f^{\circ n} &= (f^{\circ(-m)})^{-1} \circ (f^{\circ(-n)})^{-1} = (f^{\circ(-n)} \circ f^{\circ(-m)})^{-1} \\ &= (f^{\circ[(-n)+(-m)]})^{-1} = f^{\circ(n+m)}. \square \end{aligned}$$

2. Ένας μετασχηματισμός  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ορίζεται απ' τον τύπο  $f(x) = 2x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Είναι ο  $f$  αντιστρέψιμος; Βρείτε έναν τύπο για τους  $f^{\circ n}(x)$  ο οποίος να εφαρμόζεται για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(Απ: Ναι,  $f^{\circ n}(x) = 2^n(x)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  και  $f^{\circ(-m)}(x) = \frac{1}{2^m}x$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ).  
□

3. Ένας μετασχηματισμός  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  ορίζεται από τον τύπο  $f(x) = \frac{1}{2}x$ . Είναι αυτός ο μετασχηματισμός ένα προς ένα; Επί; Αντιστρέψιμος;

(Απ: Ναι, όχι, όχι). □

4. Η απεικόνιση  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  ορίζεται από τον τύπο  $f(x) = 4x(1-x)$ . Είναι αυτός ο μετασχηματισμός ένα προς ένα; Επί; Αντιστρέψιμος;

(Απ: Η  $f$  είναι καλώς ωρισμένη διότι αφού  $0 \leq x \leq 1$  άρα  $y = 4x(1-x) \geq 0$ . Επίσης, αν  $y/4 = x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - x + y/4 = 0$ , τότε πρέπει  $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 1$ . Τελικώς  $0 \leq y \leq 1 \Leftrightarrow y \in [0, 1]$ . Ναι, ναι, ναι). □

5. Η  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ορίζεται από τον τύπο  $f(x_1, x_2) = (2x_1, x_2^2 + x_1)$  για κάθε  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Δείξτε ότι η  $f$  δεν είναι αντιστρέψιμη. Δώστε έναν τύπο για την  $f^{\circ 2}(x)$ .

(Απ: Δεν είναι 1-1,  $f^{\circ 2}(x) = (4x_1, x_2^4 + x_1^2 + 2x_2^2x_1 + 2x_1)$ ). □

**Ορισμός 1.2.3** Μια απεικόνιση  $T_b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  με  $T_b(x) = x+b$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  ονομάζεται μεταφορά ή μετατόπιση. Η μεταφορά είναι μια αμφιμονοσήμαντη επί, απεικόνιση. Αντίστροφη της  $T_b$  είναι η  $T_{-b}$ . Τέτοιες απεικονίσεις μετατοπίζουν σημεία παραλλήλως προς το διάνυσμα  $b$ .

**Ορισμός 1.2.4** Ένας μετασχηματισμός

α) της ευθείας  $\mathbb{R}$  ή

β) του επίπεδου  $\mathbb{R}^2$  ή

γ) του χώρου  $\mathbb{R}^3$

καλείται ομοπαράλληλος ή συσχετισμένος, όταν απεικονίζει ευθείες σε ευθείες και διατηρεί την τιμή του απλού λόγου τριών σημείων κειμένων επί ευθείας, δηλαδή μετατρέπει τις παράλληλες ευθείες σε παράλληλες επίσης ευθείες.

Στην περίπτωση α), καλούμε ομοπαράλληλο τον οριζόμενο από τη σχέση

$$f(x) = ax + b = T_b(x)$$

όπου  $a$  και  $b$  είναι πραγματικές σταθερές. Αυτό σημαίνει ότι όλη η πραγματική ευθεία εκτείνεται μακριά από την αρχή, αν  $|a| > 1$  ή συστέλλεται προς αυτή, αν  $|a| < 1$  (αν  $a < 0$  περιστρέφεται  $180^\circ$  γύρω από το 0) και μετά μεταφέρεται κατά μια ποσότητα  $b$  (προς τα αριστερά αν  $b < 0$  και προς τα δεξιά, αν  $b > 0$ ).

Στην περίπτωση β), καλούμε ομοπαράλληλο τον οριζόμενο από τη σχέση

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2) &= (ax_1 + bx_2 + e, cx_1 + dx_2 + f) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \\ &= Ax + t = T_t(Ax), \end{aligned}$$

όπου  $a, b, c, d, e$  και  $f$  είναι πραγματικοί αριθμοί.

Στην περίπτωση γ), καλούμε ομοπαράλληλο τον οριζόμενο από τη σχέση

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, x_3) &= (ax_1 + bx_2 + cx_3 + n, dx_1 + ex_2 + fx_3 + q, gx_1 + hx_2 + mx_3 + r) \\ &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ q \\ r \end{bmatrix} \end{aligned}$$

όπου  $a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, q, r$  είναι πραγματικοί αριθμοί.

Γενικώς παρατηρούμε ότι κάθε ομοπαράλληλος μετασχηματισμός είναι γινόμενο μιας μεταφοράς και ενός γραμμικού μετασχηματισμού, δηλ. ένας ομοπαράλληλος μετασχηματισμός  $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  είναι ένας μετασχηματισμός της μορφής  $S(x) = T(x) + b$ , όπου ο  $T$  είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^n$  και  $b \in \mathbb{R}^n$ .

**Ορισμός 1.2.5** Ένας μετασχηματισμός  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  της μορφής  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_Nx^N$  όπου οι συντελεστές  $a_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) είναι μιγαδικοί αριθμοί,  $a_N \neq 0$  και  $N$  είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος, καλείται πολυωνυμικός μετασχηματισμός. Το  $N$  καλείται βαθμός του μετασχηματισμού.

Η πραγματική ευθεία μπορεί να επεκταθεί σε έναν χώρο ο οποίος τοπολογικώς είναι ένας κύκλος ο οποίος περιλαμβάνει το σημείο του απείρου. Ορίζουμε αυτόν τον χώρο να είναι ο  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  και συνήθως του δίνουμε τη σφαιρική μετρική.

**Ορισμός 1.2.6** Ένας μετασχηματισμός  $f: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  της μορφής

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$  με

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow ad - bc \neq 0 \Leftrightarrow ad \neq bc$$

καλείται γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός ή μετασχηματισμός Möbius. Αν  $c \neq 0$ , τότε  $f(-d/c) = \infty$  και  $f(\infty) = a/c$ . Αν  $c = 0$ , τότε  $f(\infty) = \infty$ .

**Ορισμός 1.2.7** Μια απεικόνιση  $f: X \rightarrow Y$ , όπου  $(X, \rho)$  και  $(Y, \sigma)$  είναι μετρικοί χώροι καλείται ομοιότητα, αν  $\sigma(f(x), f(y)) = r\rho(x, y)$  για κάθε  $x, y \in X$  και κάποιο σταθερό  $r \in \mathbb{R}_+$ . Αν  $r = 1$ , τότε η  $f$  καλείται ισομετρία.

Από την Πρόταση 1.1.3 προκύπτει ότι μια ισομετρία είναι ομοιομόρφως συνεχής συνάρτηση. Άρα μπορούμε να ταυτίσουμε μέσω ενός ομοιομορφισμού τον μετρικό χώρο  $(X, \rho)$  μ' ένα υποσύνολο του  $Y$  το οποίο έχει τη σχετική μετρική.

Στην ειδική περίπτωση ενός μετασχηματισμού  $w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ομοιότητα είναι ένας ομοπαράλληλος μετασχηματισμός που έχει μια από τις ειδικές μορφές

α)

$$w \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\sigma\eta\theta & -r\eta\mu\theta \\ r\eta\mu\theta & r\sigma\eta\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

β)

$$w \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\sigma\eta\theta & r\eta\mu\theta \\ r\eta\mu\theta & -r\sigma\eta\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

για κάποια μεταφορά  $(e, f) \in \mathbb{R}^2$ , κάποιον πραγματικό αριθμό  $r \neq 0$  και κάποια γωνία  $\theta$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Η  $\theta$  καλείται γωνία περιστροφής, ενώ το  $r$  καλείται παράγων κλίμακας ή κλιμάκωση. Αν θέσουμε  $(e, f) = (0, 0)$  στην α) έχουμε τον γραμμικό μετασχηματισμό

$$R_\theta \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\sigma\eta\theta & -r\eta\mu\theta \\ r\eta\mu\theta & r\sigma\eta\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι μια περιστροφή. Αν θέσουμε  $r = 1$ ,  $\theta = 0$  και  $(e, f) = (0, 0)$  στην β) έχουμε τον γραμμικό μετασχηματισμό

$$R \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι μια ανάκλαση ή κατοπτρισμός.

**Ορισμός 1.2.8** Ένας μετασχηματισμός  $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  οριζόμενος από την

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

όπου  $a, b, c$  και  $d \in \mathbb{C}$ ,  $ad - bc \neq 0$  καλείται μετασχηματισμός Möbius στο  $\overline{\mathbb{C}}$ . Αν  $c \neq 0$ , τότε  $f(-d/c) = \infty$  και  $f(\infty) = a/c$ . Αν  $c = 0$ , τότε  $f(\infty) = \infty$ .

**Ορισμός 1.2.9** Έστω ότι  $(\mathbb{C}, \rho)$  συμβολίζει το μιγαδικό επίπεδο με την ευκλείδεια μετρική. Ένας μετασχηματισμός  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  καλείται αναλυτικός, αν για κάθε  $z_0 \in \mathbb{C}$  υπάρχει μια ομοιότητα της μορφής  $w(z) = az + b$ , για κάποιο ζεύγος αριθμών  $a, b \in \mathbb{C}$  τέτοια, ώστε

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\rho(f(z), w(z))}{\rho(z, z_0)} = 0.$$

Οι αριθμοί  $a, b$  εξαρτώνται από το  $z_0$ . Αν, κατ'αντιστοιχία προς ένα ωρισμένο σημείο  $z_0 = c$ , έχουμε  $a = 0$ , τότε το  $c$  καλείται κρίσιμο σημείο του μετασχηματισμού και η  $f(c)$  καλείται κρίσιμη τιμή.

**Ορισμός 1.2.10** Έστω  $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  ένας αναλυτικός μετασχηματισμός τέτοιος, ώστε  $f(\overline{\mathbb{C}}) = \overline{\mathbb{C}}$ . Τότε ο επί συνόλου αντιστροφος του  $f$  είναι η απεικόνιση  $f^{-1}: \mathbb{H}(\overline{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{H}(\overline{\mathbb{C}})$  οριζόμενη από την  $f^{-1}(A) = \{w \in \overline{\mathbb{C}} : f(w) \in A\}$  για κάθε  $A \in \mathbb{H}(\overline{\mathbb{C}})$ .

**Ορισμός 1.2.11** Έστω  $f: X \rightarrow X$  μια συνάρτηση σε έναν μετρικό χώρο. Ένα σημείο  $x_0 \in X$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) = x_0$  καλείται σταθερό σημείο της συνάρτησης.

### Παράδειγμα

6. Η απεικόνιση  $T$  του Παραδείγματος 1.1.4 δεν έχει σταθερό σημείο.  $\square$

**Θεώρημα 1.2.1 (Σταθερού σημείου του Banach)** Έστω  $T$  μια συστολή από έναν πλήρη μετρικό χώρο  $X$  εντός του εαυτού του. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό  $x_0$  στον  $X$  το οποίο ικανοποιεί τις

(i)  $Tx_0 = x_0$  και

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = x_0$ , για κάθε  $x \in X$ .  $\square$

**Λήμμα 1.2.1** Έστω  $w: X \rightarrow X$  μια συνεχής απεικόνιση στον μετρικό χώρο  $(X, \rho)$ . Τότε η  $w$  απεικονίζει τον  $\mathbb{H}(X)$  στον εαυτό του.

Απόδειξη. Έστω  $S \in \mathbb{H}(X)$ . Προφανώς  $w(S) \neq \emptyset$ , οπότε αρκεί να δείξουμε ότι είναι και συμπαγές ή ισοδυνάμως ότι είναι ακολουθιακά συμπαγές.

Έστω μια ακολουθία σημείων  $y_n \in w(S)$ . Άρα υπάρχει μια ακολουθία σημείων  $x_n \in S$  τέτοια, ώστε  $y_n = w(x_n)$ . Αφού το  $S$  είναι συμπαγές, άρα και ακολουθιακά συμπαγές, υπάρχει μια υπακολουθία  $(x_{N_n})$  η οποία συγκλίνει προς ένα σημείο  $\hat{x} \in S$ . Τότε  $x_{N_n} \rightarrow \hat{x} \Rightarrow w(x_{N_n}) \rightarrow w(\hat{x})$ , διότι η  $w$  είναι συνεχής, οπότε η  $y_{N_n} = w(x_{N_n})$  είναι μια υπακολουθία της  $(y_n)$  η οποία συγκλίνει προς ένα  $\hat{y} \in w(S)$ .  $\square$

**Ορισμός 1.2.12** Ένα (υπερβολικό) επαναλαμβανόμενο σύστημα συναρτήσεων (ΕΣΣ) αποτελείται από έναν πλήρη μετρικό χώρο  $(X, \rho)$  μαζί με ένα πεπερασμένο σύνολο απεικονίσεων συστολής  $w_n: X \rightarrow X$ , με αντίστοιχους παράγοντες συσταλτικότητας  $s_n$ , για  $n = 1, 2, \dots, N$ . Τούτο συμβολίζεται με  $\{X; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$  και ο παράγων συσταλτικότητάς του είναι  $s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ .

**Θεώρημα 1.2.2** Έστω  $\{X; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$  ένα υπερβολικό ΕΣΣ με παράγοντα συσταλτικότητας  $s$ . Τότε ο μετασχηματισμός

$$W: \mathbb{H}(X) \rightarrow \mathbb{H}(X) \text{ με } W(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B)$$

για κάθε  $B \in \mathbb{H}(X)$ , είναι μια απεικόνιση συστολής άνω του πλήρους μετρικού χώρου  $(\mathbb{H}(X), h(\rho))$  με παράγοντα συστολικότητας  $s$ . Το μοναδικό σταθερό σημείο της,  $A \in \mathbb{H}(X)$ , ικανοποιεί την

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N w_n(A)$$

και δίνεται από την

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{\circ n}(B)$$

για κάθε  $B \in \mathbb{H}(X)$ .  $\square$

**Ορισμός 1.2.13** Το μοναδικό σταθερό σημείο  $A \in \mathbb{H}(X)$  που περιγράφηκε στο Θεώρημα 1.2.2 καλείται ο ελκυστής του ΕΣΣ.

### Εφαρμογή 1

Ο αλγόριθμος ο οποίος παρουσιάζεται στη συνέχεια ονομάζεται Αιτιοκρατικός Αλγόριθμος και βασίζεται στην ιδέα του άμεσου υπολογισμού μιας ακολουθίας συνόλων  $\{A_n = W^{\circ n}(A)\}$  ξεκινώντας από ένα συμπαγές αρχικό σύνολο  $A_0$ . Για ευκολία περιοριζόμαστε στο υπερβολικό ΕΣΣ της μορφής

$$\{\mathbb{R}^2; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$$

όπου κάθε απεικόνιση είναι ένας ομοπαράλληλος μετασχηματισμός.

Επιλέξτε ένα συμπαγές σύνολο  $A_0 \subset \mathbb{R}^2$ . Τότε υπολογίστε επανειλημμένως τα  $A_n = W^{\circ n}(A_0)$  σύμφωνα με τη σχέση

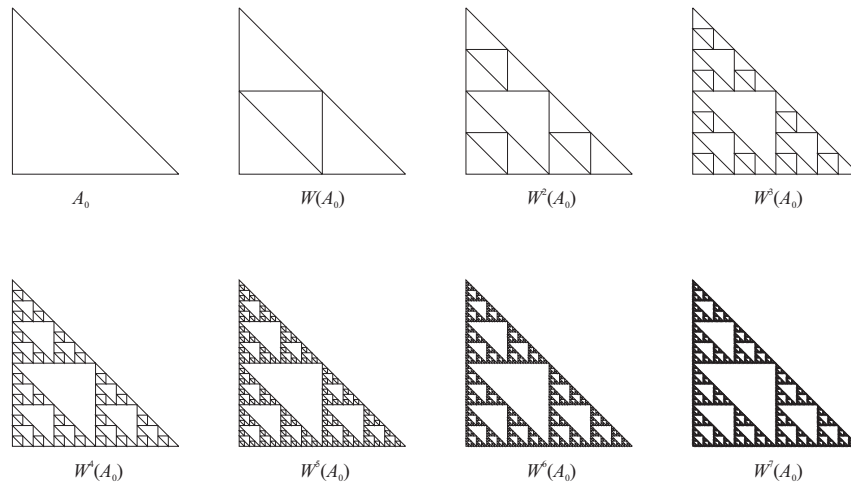
$$A_{n+1} = \bigcup_{j=1}^N w_j(A_n)$$

για  $n = 1, 2, \dots$ . Έτσι κατασκευάσατε μια ακολουθία

$$\{A_n : n = 0, 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{H}(X).$$

Τότε από το Θεώρημα 1.2.2 η ακολουθία  $(A_n)$  συγκλίνει προς τον ελκυστή του ΕΣΣ υπό τη μετρική Hausdorff.

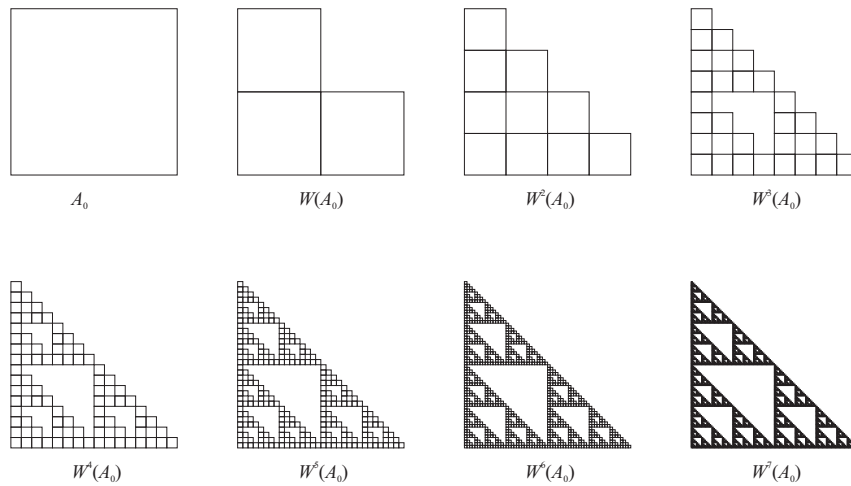
Όταν κάνουμε χρήση της μεθόδου, παίρνουμε κάθε σημείο της οθόνης μας και εφαρμόζουμε σ' αυτό καθ' έναν από τους ομοπαράλληλους μετασχηματισμούς ο οποίος φτιάχνει το ΕΣΣ για μια συγκεκριμένη εικόνα. Τότε, σχεδιάζονται τα καινούργια σημεία και μετά εφαρμόζεται ξανά η ίδια διεργασία τόσες φορές όσες χρειάζονται, ώστε να έχουμε ένα τελικό αποτέλεσμα. Στα [1] και [24] υπάρχουν οι κώδικες ωρισμένων ΕΣΣ. Απ' αυτούς ξεχωρίσαμε τον κώδικα για το τρίγωνο Sierpiński και εφαρμόσαμε



Σχήμα 1.1: Το τρίγωνο Sierpiński εκκινώντας από τρίγωνο.

τον προαναφερθέντα αλγόριθμο για διαφορετικά αρχικά συμπαγή σύνολα  $A_0$ , όπως τρίγωνο, τετράγωνο και κύκλο (βλ. Σχήματα 1.1, 1.2, 1.3).

```
program Deterministic_Algorithm;
uses
```



Σχήμα 1.2: Το τρίγωνο Sierpiński εκκινώντας από τετράγωνο.

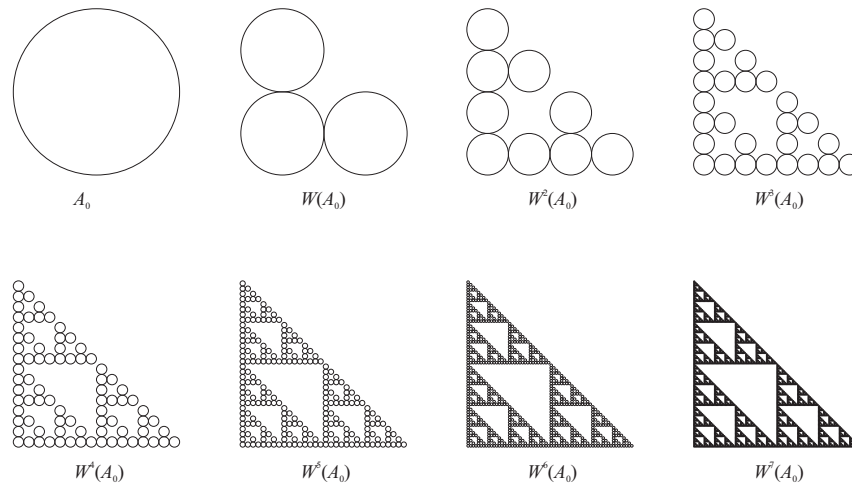
```

  Crt,Graph;
const
  max_x    = 100;
  max_y    = 100;
  CharSize = 8;
  Color    = White;
  trn_x    = 150;
  trn_y    = 170;
  set_end  = 3;
type
  matrix = array[1..max_x,1..max_y] of boolean;
  trans  = array[1..set_end] of real;
var
  new,old          : matrix;
  a,b,c,d,e,f     : trans;
  Gd,Gm,iter,start_x,start_y,xoffset : integer;
  choice          : char;
  Wstring         : string[7];
  i,j,n          : word;

procedure initialize(var new,old : matrix;choice : char);
var
  i,j : integer;

```





Σχήμα 1.3: Το τρίγωνο Sierpiński εκκινώντας από κύκλο.

```

angle : real;
begin
  for i:=1 to max_x do
    for j:=1 to max_y do
      begin
        old[i,j]:=false;
        new[i,j]:=false
      end;
    case choice of
      '1' : begin
        for i:=1 to max_x do
          begin
            old[1,i]:=true;
            PutPixel(1+start_x,i+start_y,Color);
            old[i,max_y]:=true;
            PutPixel(i+start_x,max_y+start_y,Color);
            old[max_x-i+1,max_y-i+1]:=true;
            PutPixel(max_x-i+start_x+1,max_y-i+start_y+1,Color)
          end
        end;
      '2' : begin
        for i:=1 to max_x do
          begin

```

```
        old[1,i]:=true;
        PutPixel(1+start_x,i+start_y,Color);
        old[max_x,i]:=true;
        PutPixel(max_x+start_x,i+start_y,Color);
        if not old[i,1] then
        begin
            old[i,1]:=true;
            PutPixel(i+start_x,1+start_y,Color)
        end;
        old[i,max_y]:=true;
        PutPixel(i+start_x,max_y+start_y,Color)
    end
end;
'3' : begin
    angle:=0;
    for i:=1 to 1000 do
    begin
        old[round(50*cos(angle)),round(50*sin(angle))]:=true;
        PutPixel(round(50*cos(angle))+start_x+50,
            round(50*sin(angle))+start_y+50,Color);
        angle:=angle+2*(pi/1000)
    end
end
end
end;

begin
    repeat
        ClrScr;
        gotoxy(10,10);write('1 Sierpinski triangle from triangle');
        gotoxy(10,11);write('2 Sierpinski triangle from square');
        gotoxy(10,12);write('3 Sierpinski triangle from circle');
        gotoxy(10,13);write('4 Exit');
        gotoxy(10,15);write('Enter choice:');
        repeat
            gotoxy(23,15);
            clreol;
            choice:=readkey
        until choice in ['1','2','3','4'];
        start_x:=50;
```

```
start_y:=30;
a[1]:=0.5; b[1]:=0; c[1]:=0; d[1]:=0.5; e[1]:=1; f[1]:=1;
a[2]:=0.5; b[2]:=0; c[2]:=0; d[2]:=0.5; e[2]:=1; f[2]:=50;
a[3]:=0.5; b[3]:=0; c[3]:=0; d[3]:=0.5; e[3]:=50; f[3]:=50;
if choice<>'4' then
begin
  Gd:=Detect;
  InitGraph(Gd,Gm,'c:\tp\bgi');
  if GraphResult<>grOK then
    Halt(1);
  ClearDevice;
  initialize(new,old,choice);
  Wstring:='A0';
  xoffset:=round((max_x-length(Wstring)*CharSize)/2);
  OutTextXY(start_x+xoffset,start_y+14*CharSize,Wstring);
  for n:=0 to 6 do
  begin
    start_x:=start_x+trn_x;
    if n=3 then
    begin
      start_x:=50;
      start_y:=start_y+trn_y
    end;
    for i:=1 to max_x do
      for j:=1 to max_y do
        if old[i,j] then
          for iter:=1 to set_end do
            new[round(a[iter]*i+b[iter]*j+e[iter]),
              round(c[iter]*i+d[iter]*j+f[iter])]:=true;
          for i:=1 to max_x do
            for j:=1 to max_y do
              begin
                old[i,j]:=new[i,j];
                new[i,j]:=false;
                if old[i,j] then
                  PutPixel(i+start_x,j+start_y,Color)
              end;
            Str(n+1,Wstring);
            Wstring:='w'+ Wstring + '(A0)';
            xoffset:=round((max_x-length(Wstring)*CharSize)/2);
```

```

        OutTextXY(start_x+xoffset,start_y+14*CharSize,Wstring)
    end;
    readln;
    CloseGraph
end;
until choice='4'
end.

```

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ένα σημαντικό πρόβλημα του αιτιοκρατικού αλγορίθμου.

Πρέπει να έχουμε αρκετή διαθέσιμη μνήμη. Μόνο ο καθορισμός όλων των σημείων στην τρέχουσα οθόνη μας, απαιτεί 224K θέσεων μνήμης και ένα ίσο πλήθος θέσεων απαιτούνται για αποθήκευση των μετασχηματιζόμενων σημείων καθώς αυτά παράγονται.

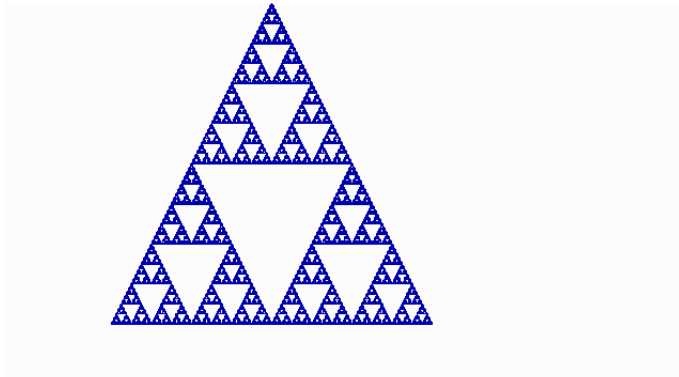
Γι' αυτόν τον λόγο, το αιτιοκρατικό πρόγραμμα στο [1] περιορίζει τη σχηματιζόμενη εικόνα σε ένα μικρό μέγεθος 100 × 100 εικονοστοιχείων. Ο Stevens όμως στο [24] ξεφεύγει από αυτό το πρόβλημα κάνοντας χρήση των δύο οθονών που είναι διαθέσιμες για γραφικά με την κάρτα EGA (VGA), όταν αυτή έχει γεμάτη συμπληρωματική μνήμη. Αυτό βέβαια κάνει το πρόγραμμα λίγο πιο αργό, αλλά αρκετά πρακτικό. Πρέπει να είμαστε όμως προσεκτικοί κατά τη χρήση αυτής της τεχνικής ώστε να καθορίζουμε, ποιά από τις δύο σελίδες γραφικών χρησιμοποιούμε για διάφορες λειτουργίες.

Το ακόλουθο είναι ένα πρόγραμμα προς παραγωγή εικόνων χρησιμοποιώντας τον Αιτιοκρατικό Αλγόριθμο και την τεχνική που αναφέρθηκε προηγουμένως (βλ. Σχήματα 1.4, 1.5).

```

program ifsdet;
uses
    Crt,Graph;
const
    a      : array[0..3] of real = (0.5,0.5,0.5,0);
    b      : array[0..3] of real = (0,0,0,0);
    c      : array[0..3] of real = (0,0,0,0);
    d      : array[0..3] of real = (0.5,0.5,0.5,0);
    e      : array[0..3] of real = (75,0,150,0);
    f      : array[0..3] of real = (0,150,150,0);
    dis_page : integer = 1;
    back_page : integer = 0;
    iterations : integer = 8;
    start_col  : integer = 0;
    set_end    : integer = 3;

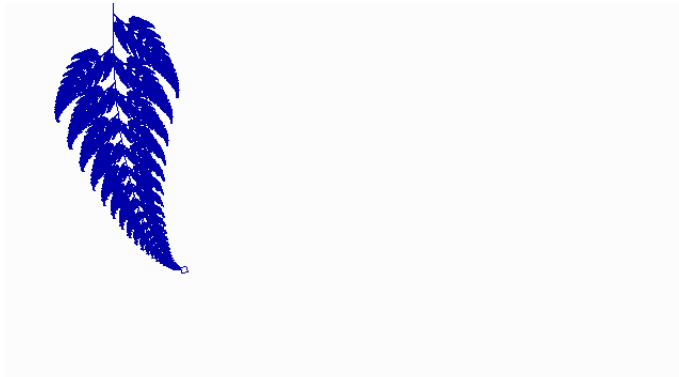
```



Σχήμα 1.4: Το τρίγωνο Sierpiński.

```
var
  GraphDriver, GraphMode, i, j, k, m, iter,
  color, displays, temp, index                : integer;
  Xpoints, Ypoints                            : array[0..24] of real;
  initiator_x1, initiator_x2, initiator_y1, initiator_y2 : array[0..9] of real;
  ch1                                          : char;

begin
  GraphDriver:=4;
  GraphMode:=EGAHi;
  InitGraph(graphDriver, GraphMode, 'c:\tp\bgi');
  for displays:=0 to 1 do
  begin
    SetVisualPage(0);
    SetActivePage(0);
    ClearDevice;
    for i:=2 to 297 do
    begin
      PutPixel(i+100, 0, 15);
      PutPixel(i+100, 299, 15);
```



Σχήμα 1.5: Ένα φύλλο φτέρης.

```
PutPixel(399,i,15);
PutPixel(100,i,15)
end;
for index:=0 to iterations do
begin
SetActivePage(dis_page);
SetVisualPage(dis_page);
ClearDevice;
for i:=start_col to 300 do
for j:=0 to 300 do
begin
SetActivePage(back_page);
color:=getPixel(i+100,j);
if color<>0 then
begin
iter:=0;
while iter<set_end do
begin
k:=Round(a[iter]*i+b[iter]*j+e[iter]);
m:=Round(c[iter]*i+d[iter]*j+f[iter]);
```

```

        iter:=iter+1;
        if (k<540) and (m<350) and (k>=-100) and (m>=0)
        then begin
            SetActivePage(dis_page);
            PutPixel(k+100,m,15)
        end
    end
end
end;
temp:=dis_page;
dis_page:=back_page;
back_page:=temp
end;
a[0]:=0;   a[1]:=0.85; a[2]:=0.2;   a[3]:=-0.15;
b[0]:=0;   b[1]:=0.04; b[2]:=-0.26; b[3]:=0.28;
c[0]:=0;   c[1]:=-0.04; c[2]:=0.23; c[3]:=0.26;
d[0]:=0.16; d[1]:=0.85; d[2]:=0.22; d[3]:=0.24;
e[0]:=0;   e[1]:=0;   e[2]:=0;   e[3]:=0;
f[0]:=0;   f[1]:=40;   f[2]:=40;   f[3]:=10;
dis_page:=1;
back_page:=0;
start_col:=-100;
iterations:=32;
set_end:=4;
ch1:=ReadKey
end
end.

```

**Ορισμός 1.2.14** Έστωσαν  $(X, \rho)$  ένας μετρικός χώρος και  $C \in \mathbb{H}(X)$ . Ορίστε ένα μετασχηματισμό  $w_0: \mathbb{H}(X) \rightarrow \mathbb{H}(X)$  με  $w_0(B) = C$  για κάθε  $B \in \mathbb{H}(X)$ . Τότε ο  $w_0$  καλείται μετασχηματισμός συμπίκνωσης και το  $C$  είναι το αντίστοιχο σύνολο συμπίκνωσης.

**Ορισμός 1.2.15** Έστωσαν  $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$  ένα υπερβολικό ΕΣΣ με παράγοντα συστατικότητας  $0 \leq s < 1$  και  $w_0: \mathbb{H}(X) \rightarrow \mathbb{H}(X)$  ένας μετασχηματισμός συμπίκνωσης. Τότε το

$$\{X; w_0, w_1, \dots, w_N\}$$

καλείται υπερβολικό ΕΣΣ με συμπίκνωση, με παράγοντα συστατικότητας  $s$ .

## Εφαρμογή 2 (Δένδρα)

Οι ακόλουθες παρατηρήσεις προέρχονται από την υπόθεση, ότι το  $t \rightarrow \infty$  και ότι εκλέγεται γωνία  $w \neq 0$  (Για  $w = 0$  το δένδρο εκφυλίζεται σε μια ευθεία). Χάρην ευκολίας εκλέγουμε  $s = 1$ . Μεταβάλλουμε τον παράγοντα σμίκρυνσης  $f$  και ενδιαφερόμαστε να απαντήσουμε στις ερωτήσεις:

- α) Ποιό το συνολικό μήκος  $G$  όλων των παρακλαδιών;  
 β) Μπορεί το δένδρο να περιοριστεί σε μια πεπερασμένη επιφάνεια;

Το πλήθος των κλάδων στη  $n$ -ιστή στάθμη διακλάδωσης δίνεται από τη γεωμετρική ακολουθία με  $n$ -ιστό όρο  $a_n = 2^n$ . Το συνολικό πλήθος  $A_t$  όλων των παρακλαδιών δίνεται από τη γεωμετρική σειρά

$$A_t = \sum_{n=1}^t 2^n.$$

Το μήκος  $s_n$  ενός μόνο κλάδου μετά τη  $n$ -ιστή διακλάδωση είναι  $s_n = f^{n-1}$ .

α) Συνολικό μήκος: το συνολικό μήκος  $G$  όλων των παρακλαδιών του δένδρου είναι

$$G = \lim_{t \rightarrow \infty} G_t = \sum_{t=1}^{\infty} 2^t f^t.$$

Πρόκειται για μια γεωμετρική σειρά με λόγο  $q = 2f$ . Το συνολικό μήκος του δένδρου είναι πεπερασμένο για  $q < 1$ , δηλαδή όταν ο παράγοντας σμίκρυνσης  $f$  είναι μικρότερος από  $1/2$ . Αν  $f > 1/2$  τότε το συνολικό μήκος είναι άπειρο. Για  $f = 1/2$ , τότε το άθροισμα όλων των μηκών των κλάδων είναι ίδιο σε κάθε στάθμη διακλάδωσης.

β) Περιορισμός του σχήματος: η έκταση ενός δενδρικού σχήματος μπορεί να εκτιμηθεί βάσει της απόστασης, την οποία έχουν οι άκρες του δένδρου από το πρώτο επίπεδο διακλάδωσης. Τα μήκη ενός δρόμου δια μέσου ενός δένδρου μέχρι την κορυφή είναι

$$l = \lim_{t \rightarrow \infty} l_t = \sum_{t=1}^{\infty} s_t = \sum_{t=1}^{\infty} f^t.$$

Για  $f > 1$ , το  $l$  ξεπερνά όλα τα φράγματα, οπότε το σχήμα δεν μπορεί να περιοριστεί. Για  $f < 1$  ο δρόμος είναι πεπερασμένος. Και πάλι υπάρχει μια γεωμετρική σειρά με  $q = f$ . Τότε, για το συνολικό μήκος ενός δρόμου ισχύει

$$l = \sum_{t=1}^{\infty} f^t = \frac{1}{1-f} \quad (0 \leq f < 1).$$

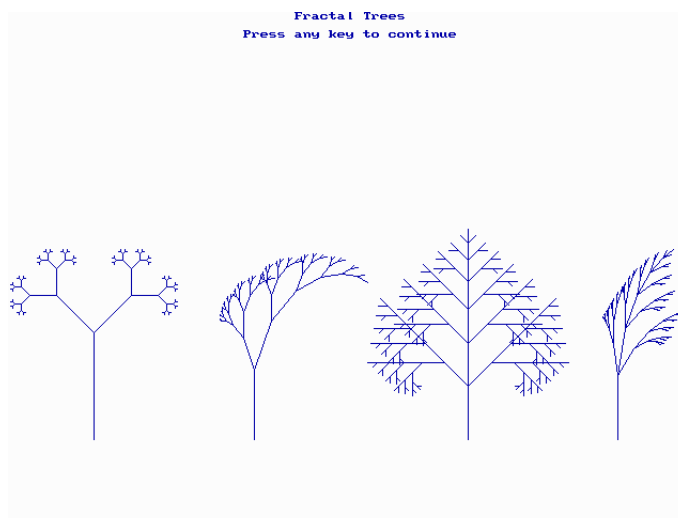
Ένας κύκλος με κέντρο το πρώτο σημείο διακλάδωσης και ακτίνας  $r(f) = 1/(1-f)$  περικλείει το δένδρο. Από εδώ προκύπτει για  $0.5 < f < 1$  η κατάσταση, όπου



ένα αντικείμενο με άπειρο μήκος πλευρών μπορεί να περικλείεται σε μια πεπερασμένη επιφάνεια.

Η ακτίνα μπορεί να εκτιμηθεί με ακρίβεια: η μεγαλύτερη ευκλείδεια απόσταση μιας δενδρικής κορυφής από το πρώτο σημείο διακλάδωσης βρίσκεται, εάν οδεύουμε στρεφόμενοι μια αριστερά μια δεξιά εναλλακτικώς. Σε ένα άρτιο πλήθος διαστημάτων η απόσταση προκύπτει ως ακολούθως: η απόσταση  $A_{2n}A_{2(n+1)}$  είναι η μεγαλύτερη πλευρά σε ένα τρίγωνο με μήκη πλευρών  $f_{2n}$  και  $f_{2n+1}$  και περιεχόμενης γωνίας  $180^\circ - \omega$ , η οποία μπορεί να υπολογισθεί από τον νόμο των συνημιτόνων.

Περισσότερες πληροφορίες για τα δένδρα μπορεί ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης να βρεί στα [6], [7] και [24]. Εμείς θα αρκεστούμε στην παρατήρηση ότι η διαδικασία BAUM\_STAMM η οποία περιέχεται στο επόμενο πρόγραμμα, είναι το παράγωγο ενός ΕΣΣ με συμπύκνωση (βλ. Σχήματα 1.6, 1.7, 1.8).

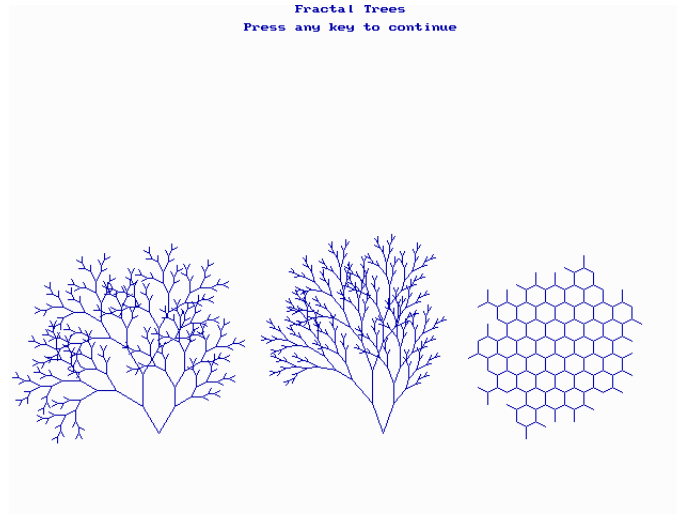


Σχήμα 1.6: Μορφοκλασματικά δένδρα.

```

program Fractal_Trees;
uses
  Crt,Graph,UtilUnit;
const
  CharSize = 8;
var
  Gd,Gm,t,wl,wr,w : integer;

```



Σχήμα 1.7: Μορφοκλασματικά δένδρα (συνέχεια).

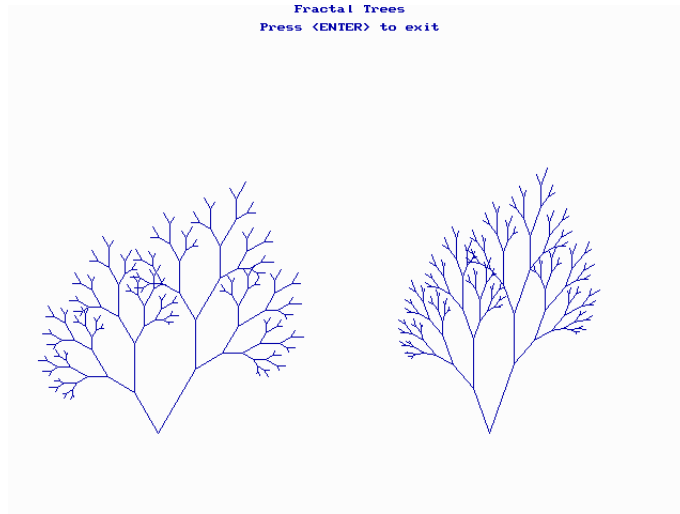
```

fl,fr,s,f      : real;
OutStr         : string[25];
ch             : char;

procedure BAUM_STAMM(s : real;t : integer);
begin
  if t=0
  then exit
  else begin
    forwd(round(s));
    turn(-45);
    BAUM_STAMM(s/2,t-1);
    turn(90);
    BAUM_STAMM(s/2,t-1);
    turn(-45);
    back(round(s))
  end
end;

procedure BAUM_STAMM_FLEX(s : real;t,wl,wr : integer;fl,fr : real);

```



Σχήμα 1.8: Μορφοκλασματικά δένδρα (συνέχεια).

```

begin
  if t=0
    then exit
    else begin
      forwd(round(s));
      turn(-wl);
      BAUM_STAMM_FLEX(s*fl,t-1,wl,wr,fl,fr);
      turn(wl+wr);
      BAUM_STAMM_FLEX(s*fr,t-1,wl,wr,fl,fr);
      turn(-wr);
      back(round(s))
    end
end;

procedure B_ASY(s : real;t,w : integer;f : real);
begin
  if t=0
    then exit
    else begin
      turn(-w);

```

```

        forwd(round(s));
        B_ASY(s*f,t-1,w,f);
        back(round(s));
        turn(2*w);
        forwd(round(s));
        turn(w);
        forwd(round(s));
        B_ASY(s*f,t-1,w,f);
        back(round(s));
        turn(-(2*w));
        forwd(round(s));
        turn(-w);
        forwd(round(s));
        B_ASY(s*f,t-1,w,f);
        back(round(s));
        turn(2*w);
        forwd(round(s));
        B_ASY(s*f,t-1,w,f);
        back(round(s));
        turn(-w);
        back(round(s));
        turn(w);
        back(round(s));
        turn(-w)
    end
end;

procedure L_BAUM(s : real;t,w : integer;f : real);forward;

procedure R_BAUM(s : real;t,w : integer;f : real);
begin
    if t=0
        then exit
        else begin
            turn(w);
            forwd(round(s));
            L_BAUM(s,t-1,w,f);
            back(round(s));
            turn(-(2*w));
            forwd(round(s*f));
        end
    end
end;

```

```
        R_BAUM(s*f,t-1,w,f);
        back(round(f*s));
        turn(w);
    end
end;

procedure L_BAUM;
begin
    if t=0
    then exit
    else begin
        turn(-w);
        forwd(round(s));
        R_BAUM(s*f,t-1,w,f);
        back(round(s));
        turn(2*w);
        forwd(round(s*f));
        L_BAUM(s*f,t-1,w,f);
        back(round(f*s));
        turn(-w)
    end
end;

begin {main}
    GrafMode;
    OutStr:='Fractal Trees';
    OutTextXY(round((MaxCol-length(OutStr)*CharSize)/2),0,OutStr);
    OutStr:='Press any key to continue';
    OutTextXY(round((MaxCol-length(OutStr)*CharSize)/2),17,OutStr);
    hd:=90;
    xco:=80;
    yco:=80;
    GeheZuBildPunkt(xco,yco);
    s:=100;
    t:=7;
    BAUM_STAMM(s,t);
    xco:=230;
    GeheZuBildPunkt(xco,yco);
    s:=65;
    t:=7;
    wl:=20;   wr:=20;
```

```
fl:=0.75; fr:=0.5;
BAUM_STAMM_FLEX(s,t,wl,wr,fl,fr);
xco:=430;
GeheZuBildPunkt(xco,yco);
s:=50;
wl:=45; wr:=0;
fl:=0.65; fr:=0.80;
BAUM_STAMM_FLEX(s,t,wl,wr,fl,fr);
wl:=-45;
BAUM_STAMM_FLEX(s,t,wl,wr,fl,fr);
xco:=570;
GeheZuBildPunkt(xco,yco);
s:=60;
t:=6;
wl:=30; wr:=-10;
fl:=0.5; fr:=0.75;
BAUM_STAMM_FLEX(s,t,wl,wr,fl,fr);
wl:=-8; wr:=-10;
BAUM_STAMM_FLEX(s,t,wl,wr,fl,fr);
ch:=readkey;
ClearDevice;
OutStr:='Fractal Trees';
OutTextXY(round((MaxCol-length(OutStr)*CharSize)/2),0,OutStr);
OutStr:='Press any key to continue';
OutTextXY(round((MaxCol-length(OutStr)*CharSize)/2),17,OutStr);
xco:=140;
GeheZuBildPunkt(xco,yco);
s:=30;
t:=4;
w:=30;
f:=0.6;
B_ASY(s,t,w,f);
xco:=350;
GeheZuBildPunkt(xco,yco);
w:=20;
B_ASY(s,t,w,f);
xco:=520;
yco:=150;
GeheZuBildPunkt(xco,yco);
s:=11;
```

```

w:=60;
f:=1;
B_ASY(s,t,w,f);
ch:=readkey;
ClearDevice;
OutStr:='Fractal Trees';
OutTextXY(round((MaxCol-length(OutStr)*CharSize)/2),0,OutStr);
OutStr:='Press <ENTER> to exit';
OutTextXY(round((MaxCol-length(OutStr)*CharSize)/2),17,OutStr);
xco:=140;
yco:=80;
GeheZuBildPunkt(xco,yco);
s:=70;
t:=7;
w:=30;
f:=0.65;
L_BAUM(s,t,w,f);
xco:=450;
GeheZuBildPunkt(xco,yco);
w:=20;
L_BAUM(s,t,w,f);
ExitGrafic
end.

```

**Θεώρημα 1.2.3 (Το Θεώρημα αλληλοεπικάλυψης)** Έστωσαν  $(X, \rho)$  ένας πλήρης μετρικός χώρος,  $L \in \mathbb{H}(X)$  και  $\varepsilon \geq 0$ . Επιλέξτε ένα ΕΣΣ (ή ΕΣΣ με συμπίκνωση)  $\{X; w_i : i = (0), 1, 2, \dots, N\}$  με παράγοντα συσταλτικότητας  $0 \leq s < 1$ , έτσι ώστε

$$h \left( L, \bigcup_{\substack{n=1 \\ (n=0)}}^N w_n(L) \right) \leq \varepsilon.$$

Τότε  $h(L, A) \leq \varepsilon / (1 - s)$ , όπου  $A$  είναι ο ελκυστής του ΕΣΣ. Ισοδυνάμως,

$$h(L, A) \leq (1 - s)^{-1} h \left( L, \bigcup_{\substack{n=1 \\ (n=0)}}^N w_n(L) \right)$$

για κάθε  $L \in \mathbb{H}(X)$ .

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
 h(L, A) &= h(L, \lim_{n \rightarrow \infty} W^{\circ n}(L)) && \text{(από Θεώρημα 1.2.2)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} h(L, W^{\circ n}(L)) && (h \text{ συνεχής ως προς δευτ. μετ. για στ. } L) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n h(W^{\circ(m-1)}(L), W^{\circ m}(L)) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n s^{m-1} h(L, W(L)) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-s^n}{1-s} h(L, W(L)) \\
 &= \frac{1}{1-s} h(L, W(L)). \quad \square
 \end{aligned}$$

Το Θεώρημα αυτό μας λέει ότι για να βρούμε ένα ΕΣΣ του οποίου ο ελκυστής είναι «κοντά προς» ή «μοιάζει όπως» ένα δοθέν σύνολο, πρέπει κανείς να προσπαθήσει να βρει ένα σύνολο μετασχηματισμών-απεικονίσεων συστολής σε έναν κατάλληλο χώρο εντός του οποίου βρίσκεται το δοθέν σύνολο έτσι ώστε η ένωση ή αλληλοεπικάλυψη των εικόνων του δοθέντος συνόλου κάτω από τους μετασχηματισμούς να είναι κοντά προς το δοθέν σύνολο. Η γειτονικότητα μετρείται χρησιμοποιώντας τη μετρική Hausdorff.



## Κεφάλαιο 2

# Χαοτική δυναμική σε πολυσχιδή

### 2.1 Συμβολική δυναμική

Έστω ότι  $\Sigma_N$  συμβολίζει το σύνολο όλων των δυνατών ακολουθιών φυσικών αριθμών μεταξύ 1 και  $N$ , δηλαδή,

$$\begin{aligned}\Sigma_N &= \{(x) = (x_1 x_2 x_3 \dots) : x_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq x_i \leq N \text{ για } i = 1, 2, \dots\} \\ &= \{\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \{1, 2, \dots, N\} \mid \sigma(n) \in \{1, 2, \dots, N\} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \{1, 2, \dots, N\} \\ &= \{1, 2, \dots, N\}^{\mathbb{N}}.\end{aligned}$$

Το  $\Sigma_N$  ονομάζεται χώρος των κωδίκων ή διευθύνσεων σε  $N$  σύμβολα, όπου  $N$  είναι ένας θετικός ακέραιος.

Στον χώρο των κωδίκων  $\Sigma_N$  ορίζουμε

$$\rho_N(x, y) = \rho_N((x_1 x_2 x_3 \dots), (y_1 y_2 y_3 \dots)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i}.$$

Κάθε ζεύγος σημείων στο  $\Sigma_N$  βρίσκεται μακριά σε πεπερασμένη απόσταση, διότι

$$\rho_N(x, y) \leq (N-1) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(N+1)^i} = \frac{N-1}{N},$$

οπότε ο χώρος είναι φραγμένος και η  $\rho_N$  είναι πράγματι μια συνάρτηση η οποία φέρνει το  $\Sigma_N \times \Sigma_N$  εντός του  $\mathbb{R}$ .

**Πρόταση 2.1.1** Η  $\rho_N$  είναι μια μετρική υπεράνω του  $\Sigma_N$ .

*Απόδειξη.* Προφανώς  $\rho_N(x, y) \geq 0$  για κάθε  $x, y \in \Sigma_N$  και  $\rho_N(x, y) = 0$  τότε και μόνο, αν  $x_i = y_i$  για κάθε  $i$ . Αφού  $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ , έπεται ότι  $\rho_N(x, y) = \rho_N(y, x)$ . Τελικώς, αν  $x, y, z \in \Sigma_N$  τότε  $|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$  από την οποία συμπεραίνουμε ότι  $\rho_N(x, y) \leq \rho_N(x, z) + \rho_N(z, y)$ . Συνεπώς ο  $(\Sigma_N, \rho_N)$  είναι ένας μετρικός χώρος.  $\square$

**Πρόταση 2.1.2** Έστω  $x, y \in \Sigma_N$  και υποθέτουμε ότι  $x_i = y_i$  για  $i = 1, 2, \dots, n+1$ . Τότε  $\rho_N(x, y) \leq 1/(N+1)^{n+1}$ . Αντιστρόφως, αν  $\rho_N(x, y) < 1/(N+1)^{n+1}$ , τότε  $x_i = y_i$  για  $i \leq n+1$ .

*Απόδειξη.* Αν  $x_i = y_i$  για  $i \leq n+1$ , τότε

$$\begin{aligned} \rho_N(x, y) &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i} + \sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i} = \sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i} \leq \sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{(N-1)}{(N+1)^i} \\ &\leq \frac{1}{(N+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά, αν  $x_j \neq y_j$  για κάποιο  $j \leq n+1$ , τότε πρέπει να έχουμε

$$\rho_N(x, y) \geq \frac{1}{(N+1)^j} \geq \frac{1}{(N+1)^{n+1}}$$

συνεπώς, αν

$$\rho_N(x, y) < \frac{1}{(N+1)^{n+1}},$$

τότε  $x_i = y_i$  για  $i \leq n+1$ .  $\square$

**Ορισμός 2.1.1** Ένας μετασχηματισμός  $T: \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$  σε χώρο κωδίκων ορίζεται από την

$$T(x_1x_2x_3x_4 \dots) = x_2x_3x_4x_5 \dots$$

και λέγεται τελεστής μετατόπισης.

**Πρόταση 2.1.3** Ο τελεστής μετατόπισης είναι συνεχής.

*Απόδειξη.*  $\rho_N(Tx, Ty) \leq (N+1)\rho_N(x, y), \forall x, y \in \Sigma_N$ .  $\square$

**Ορισμός 2.1.2** Ένα δυναμικό σύστημα είναι ένας μετασχηματισμός  $f: X \rightarrow X$  σε έναν μετρικό χώρο  $(X, \rho)$ . Τούτο συμβολίζεται με  $\{X; f\}$ . Η έμπροσθεν τροχιά ενός σημείου  $x \in X$  είναι το σύνολο

$$O^+(x) = \{f^{\circ n}(x) : n \geq 0, f^{\circ 0}(x) = x\}.$$

Αν η  $f$  είναι αντιστρέψιμη, μπορούμε να ορίσουμε ολόκληρη την τροχιά του  $x$ , ως

$$O(x) = \{f^{\circ n}(x) : n \in \mathbb{Z}, f^{\circ 0}(x) = x\}$$

και την όπισθεν τροχιά του  $x$ , ως

$$O^-(x) = \{f^{\circ(-n)}(x) : n \geq 0, f^{\circ 0}(x) = x\}.$$

Έστωσαν  $S \subset \mathbb{R}^n$  και  $f: S \rightarrow S$  μία συνεχής απεικόνιση. Ένα επαναληπτικό σχήμα  $\{f^{\circ k}\}$  καλείται διακριτικό δυναμικό σύστημα.

Έτσι σκοπός μας, είναι να γνωρίσουμε όλες τις τροχιές μιας απεικόνισης, δηλαδή ενδιαφερόμαστε για τη συμπεριφορά της ακολουθίας των επαναλήψεων (ή των τροχιών)  $\{f^{\circ k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$  για διαφορετικά αρχικά σημεία  $x \in S$  και ιδιαίτερος για μεγάλο  $k$ .

Για παράδειγμα, αν  $f(x) = \sin x$ , η ακολουθία  $f^{\circ k}(x)$  συγκλίνει προς το 0, 99985 καθώς  $k \rightarrow \infty$  για κάθε αρχικό  $x$  (δεν έχει παρά να πατάτε επαναληπτικώς το πλήκτρο 'cos' ενός υπολογιστή τσέπης). Ομοίως, αν το προηγούμενο πείραμα γίνει πατώντας το πλήκτρο 'exp', δοθείσης μιας αρχικής εισόδου  $x$ , είναι σα να υπολογίζουμε την ακολουθία των αριθμών

$$x, e^x, e^{e^x}, \dots$$

Με λίγα λόγια επαναλαμβάνουμε την εκθετική συνάρτηση. Αν αυτό το πείραμα επαναληφθεί ξανά και ξανά, γίνεται φανερό ότι οιαδήποτε επιλογή του αρχικού  $x$  οδηγεί σχετικά γρήγορα σε ένα μήνυμα υπερχείλισης από τον υπολογιστή: δηλαδή, διαδοχικές επαναλήψεις της  $\exp(x)$  τείνουν προς το  $\infty$ . Οι τροχιές και οι έμπροσθεν τροχιές των σημείων μπορούν να είναι αρκετά πολύπλοκα σύνολα, ακόμα και για πολύ απλές μη γραμμικές απεικονίσεις.

**Ορισμός 2.1.3** Έστω  $f: X \rightarrow X$  μία συνάρτηση στον μετρικό χώρο  $(X, \rho)$ . Ένα  $A \subset X$  καλείται ελκυστής της  $f$ , εάν το  $A$  είναι κλειστό σύνολο και αμετάβλητο υπό την  $f$  τέτοιο, ώστε  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(f^{\circ k}(x), A) = 0, \forall x \in V$  με  $A \subset V$ , όπου το  $V$  είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του  $X$ .

### Παραδείγματα

1. Το  $\{\Sigma_N; T\}$ , όπου  $T$  ο τελεστής μετατόπισης, είναι ένα δυναμικό σύστημα.  $\square$
2. Το  $\{[0, 1]; f(x) = \lambda x(1-x)\}$  είναι ένα δυναμικό σύστημα για κάθε  $\lambda \in [0, 4]$ . Λέμε ότι έχουμε μια μονοπαραμετρική οικογένεια δυναμικών συστημάτων.  $\square$
3. Έστω ότι  $w(x) = Ax + t$  είναι ένας ομοπαράλληλος μετασχηματισμός στο  $\mathbb{R}^2$ . Τότε  $\{\mathbb{R}^2; w\}$  είναι ένα δυναμικό σύστημα.  $\square$

4. Ορίσατε  $T: \mathbf{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbf{C}([0, 1])$  με  $(Tf)(x) = \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}x) + \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})$ . Τότε  $\{\mathbf{C}([0, 1]); T\}$  είναι ένα δυναμικό σύστημα.  $\square$
5. Έστω ότι  $w: \overline{\mathbf{C}} \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$  είναι ένας μετασχηματισμός Möbius. Τότε  $\{\overline{\mathbf{C}}; w\}$  είναι ένα δυναμικό σύστημα.  $\square$
6. Το  $\{[0, 1]; 2x \pmod{1}\}$  είναι ένα δυναμικό σύστημα. Εδώ  $2x \pmod{1} = 2x - [2x]$ , όπου  $[2x]$  συμβολίζει το ακέραιο μέρος του  $2x$ , δηλαδή τον μεγαλύτερο ακέραιο μικρότερο ή ίσο του  $2x$ .  $\square$
7. Ένα από τα απλούστερα επίπεδα δυναμικά συστήματα με μορφοκλασματικό ελκυστή είναι ο μετασχηματισμός του αρτοποιού, ο οποίος ονομάζεται έτσι επειδή μοιάζει με τη διεργασία της επαναλαμβανόμενης πλάσης ενός κομματιού από ζυμάρι και της δίπλωσής του στα δύο.

Έστω ότι  $E = [0, 1] \times [0, 1]$  είναι το μοναδιαίο τετράγωνο. Για σταθερό  $0 < \lambda < 1/2$  ορίζουμε τον μετασχηματισμό του αρτοποιού  $f: E \rightarrow E$  με

$$f(x, y) = \begin{cases} (2x, \lambda y), & \text{αν } 0 \leq x \leq 1/2 \\ (2x - 1, \lambda y + 1/2), & \text{αν } 1/2 < x \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Αυτός ο μετασχηματισμός μπορεί να θεωρηθεί ότι εκτείνει το  $E$  σε ένα ορθογώνιο πλευρών  $2 \times \lambda$  κόβοντάς το σε ορθογώνια πλευρών  $1 \times \lambda$  και τοποθετώντας τα το ένα δίπλα στο άλλο αφήνοντας μεταξύ τους κενό  $1/2 - \lambda$  μονάδων.

### Εφαρμογή 1

Ένα συγκεκριμένο παράδειγμα ενός μετασχηματισμού έκτασης και δίπλωσης, είναι η απεικόνιση Hénon  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  με

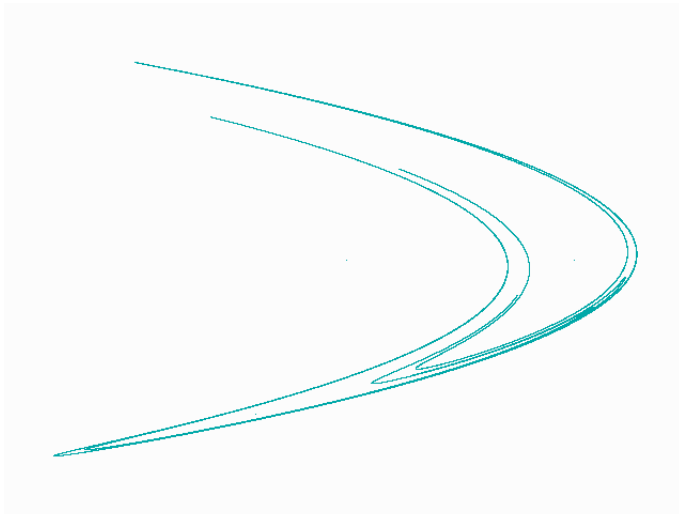
$$f(x, y) = (y + 1 - ax^2, bx)$$

όπου  $a$  και  $b$  είναι σταθερές (Συνήθως για μελέτη επιλέγονται οι τιμές  $a = 1.4$  και  $b = 0.3$ , βλ. Σχήμα 2.1).

```

program Henon_Attraktor;
uses
  Crt, Graph;
const
  maxcol = 640;
  maxrow = 480;
var
  i, j, n, nmax, Gd, Gm           : integer;

```



Σχήμα 2.1: Ο ελκυστής Hénon.

```
a,b,fx,fy,xschirm,yschirm,xmin,xmax,ymin,ymax,x,y,xneu : extended;
begin
  clrscr;
  a:=1.4;
  b:=0.3;
  write('Eingabe: xmin = ');readln(xmin); {-1.5}
  write('      xmax = ');readln(xmax); {1.5}
  write('      ymin = ');readln(ymin); {-0.5}
  write('      ymax = ');readln(ymax); {0.5}
  x:=0;
  y:=0;
  write('Eingabe: Anzahl der Iterationen nmax = ');
  readln(nmax); {40000}
  fx:=maxcol/(xmax-xmin);
  fy:=maxrow/(ymax-ymin);
  Gd:=detect;
  InitGraph(Gd,Gm,'c:\tp\bgi');
  if GraphResult<>grOK then
    halt(1);
  ClearDevice;
```

```

n:=0;
repeat
  xschirm:=(x-xmin)*fx;
  yschirm:=(y-ymin)*fy;
  if (xschirm<maxcol+1) and (xschirm>-1) and
    (yschirm<maxrow+1) and (yschirm>-1)
    then PutPixel(round(xschirm),round(yschirm),3);
  xneu:=y+1-a*x*x;
  y:=b*x;
  x:=xneu;
  n:=n+1
until n>nmax;
readln;
CloseGraph
end.

```

Προς αναπαράσταση άλλων ελκυστών τύπου Hénon αναφέρουμε ενδεικτικώς την

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n \cos(w) - (y_n - x_n^2) \sin(w) \\
 y_{n+1} &= x_n \sin(w) + (y_n - x_n^2) \cos(w)
 \end{aligned}$$

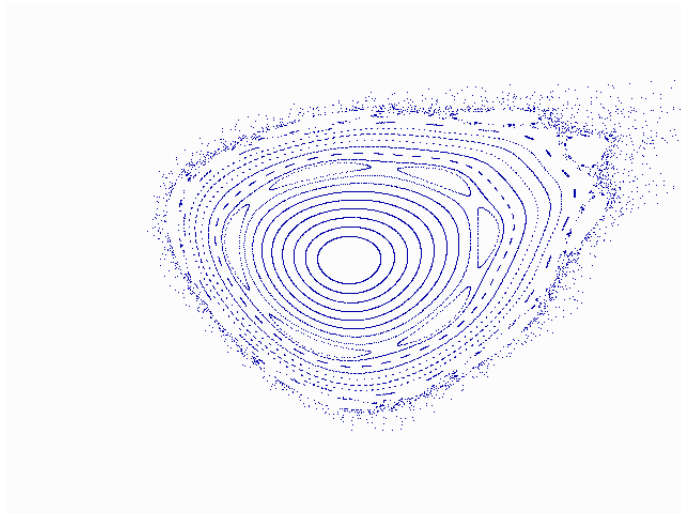
όπου  $0 \leq w \leq \pi$ , ενώ το ακόλουθο πρόγραμμα υλοποιεί τις προηγούμενες σχέσεις (βλ. Σχήμα 2.2).

```

program HenonAttraktoren;
uses
  Crt,Graph,UtilUnit;
const
  maxreal = 1.7E38;
var
  xo,yo,dxo,dyo,cosA,sinA,xneu,
  xalt,yalt,deltax,deltay,phasenwinkel : extended;
  ok1,ok2                               : boolean;
  i,j,orbitzahl,punktezahl             : integer;

begin
  GrafMode;
  phasenwinkel:=1.111;
  xmin:=-1.2;
  xmax:=1.2;
  ymin:=-1.2;
  ymax:=1.2;

```



Σχήμα 2.2: Ένας ελκυστής τύπου Hénon.

```
xo:=0.098;
yo:=0.061;
dxo:=0.04;
dyo:=0.03;
orbitzahl:=40;
punktezahl:=700;
cosA:=cos(phasenwinkel);
sinA:=sin(phasenwinkel);
xalt:=xo;
yalt:=yo;
deltax:=maxcol/(xmax-xmin);
deltay:=maxrow/(ymax-ymin);
for j:=1 to orbitzahl do
begin
  i:=1;
  while i<=punktezahl do
  begin
    if (abs(xalt)<=maxreal) and (abs(yalt)<=maxreal) then
    begin
      xneu:=xalt*cosA-(yalt-xalt*xalt)*sinA;
```

```

        yalt:=xalt*sinA+(yalt-xalt*xalt)*cosA;
        ok1:=(abs(xneu-xmin)<maxint/deltax);
        ok2:=(abs(ymax-yalt)<maxint/deltay);
        if ok1 and ok2 then
            SetzeWeltPunkt(xneu,yalt);
            xalt:=xneu;
        end;
        i:=i+1
    end;
    xalt:=xo+j*dxo;
    yalt:=yo+j*dyo
end;
ExitGrafic
end.

```

### Εφαρμογή 2 (Ο ελκυστής Lorenz)

Πέντε χρόνια πριν ο Michael Hénon ασχοληθεί στο Παρίσι με μοντέλα προς προσομοίωση δυναμικών συστημάτων στον τομέα της φυσικής, σε ένα άλλο μέρος συνέβησαν παρόμοια συγκινητικά πράγματα.

Ο αμερικανός Edward N. Lorenz έγραψε το 1963 σε έναν εντελώς διαφορετικό κλάδο μια αξιοσημείωτη επιστημονική έκθεση. Ενώ προσπαθούσε να αναπτύξει ένα μοντέλο για τον καιρό παρατήρησε κάποιες παράξενες ασυμφωνίες στη συμπεριφορά του μοντέλου του.

Ο Lorenz περιέγραψε στην έκθεσή του μια οικογένεια τριών συνήθων διαφορικών εξισώσεων με παραμέτρους  $a, b, c$ :

$$\begin{aligned}
 dx/dt &= a(y - x) \\
 dy/dt &= bx - y - xz \\
 dz/dt &= xy - cz.
 \end{aligned}$$

Κατά τον αριθμητικό υπολογισμό μέσω ενός υπολογιστή αυτές οι εξισώσεις δείχνουν άκρως πολύπλοκες λύσεις. Οι περίπλοκες συνάψεις και εξαρτήσεις των παραμέτρων μπορούν επιτέλους να εξηγηθούν εν πρώτοις μέσω γραφικών μεθόδων.

Το σύστημα των εξισώσεων του Lorenz είναι ίσως το πιο γνωστό παράδειγμα ενός συνεχούς δυναμικού συστήματος με fractal ελκυστή.

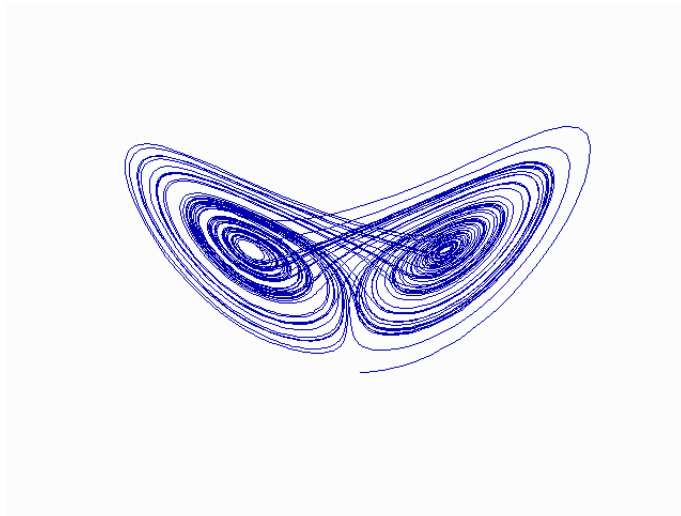
Ένας αλγόριθμος ο οποίος κατασκευάζει μια μαυρόασπρη εκδοχή του ελκυστή υπάρχει στο [7] και τον οποίο παραθέτουμε ως έχει (βλ. Σχήμα 2.3).

```

program Lorenzattraktor;
uses
    Crt, Graph, UtilUnit;

```





Σχήμα 2.3: Ο ελκυστής Lorenz.

```
var
  i          : integer;
  x,y,z,A,B,C : extended;

procedure f;
const
  delta = 0.01;
var
  dx,dy,dz : extended;
begin
  dx:=A*(y-x);
  dy:=x*(B-z)-y;
  dz:=x*y-C*z;
  x:=x+delta*dx;
  y:=y+delta*dy;
  z:=z+delta*dz
end;

begin
  Xmin:=-30; Xmax:=30; Ymin:=-30; Ymax:=80;
```

```

A:=10.0 {20}; B:=28 {20}; C:=8/3;
x:=1;
y:=1;
z:=1;
f;
GrafMode;
SetzeWeltPunkt(x,z);
repeat
  f;
  ZieheWeltLinie(x,z)
until keypressed;
ExitGrafic;
end.

```

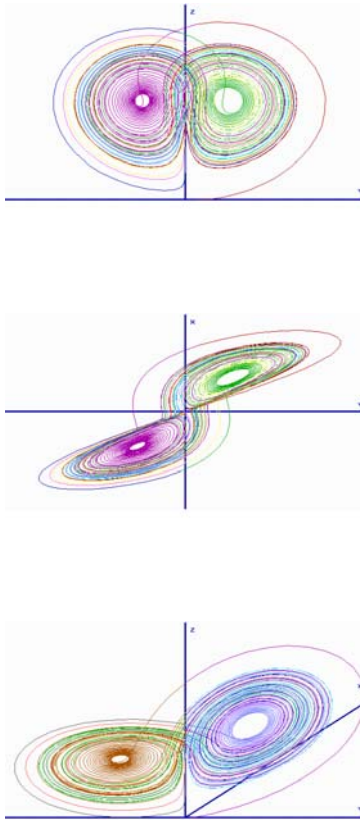
Μια έγχρωμη εκδοχή πραγματοποιείται μέσω του αλγόριθμου που υπάρχει στο [24] και τον οποίο παραθέτουμε ευθύς αμέσως (βλ. Σχήμα 2.4).

```

{
  lorenz = PROGRAM TO PLOT LORENZ ATTRACTOR
}

program lorenz;
uses
  Crt,Graph;
const
  maxcol      = 639;
  maxrow      = 349;
  rad_per_degree = 0.0174533;
  third       = 0.333333333;
var
  x,y,z,d0_x,d0_y,d0_z,d1_x,d1_y,d1_z,d2_x,d2_y,d2_z,
  d3_x,d3_y,d3_z,xt,yt,zt,dt,dt2,x_angle,y_angle,z_angle,
  sx,sy,sz,cx,cy,cz,temp_x,temp_y,old_y           : real;
  dummy,GraphDriver,GraphMode,i,j,row,color,col,old_row,old_col : integer;
  ch                                               : char;
function degrees_to_radians(degrees : real) : real;
begin
  while degrees>=360 do
    degrees:=degrees-360;
  while degrees<0 do

```



Σχήμα 2.4: Διάφορες προβολές του ελκυστή Lorenz.

```
degrees:=degrees+360;  
degrees_to_radians:=rad_per_degree*degrees  
end;  
  
begin  
color:=15;  
x_angle:=45;  
y_angle:=0;  
z_angle:=90;  
x_angle:=degrees_to_radians(x_angle);  
sx:=sin(x_angle);
```

```
cx:=cos(x_angle);
y_angle:=degrees_to_radians(y_angle);
sy:=sin(y_angle);
cy:=cos(y_angle);
z_angle:=degrees_to_radians(z_angle);
sz:=sin(z_angle);
cz:=cos(z_angle);
for j:=0 to 2 do
begin
  color:=4;
  GraphDriver:=4;
  GraphMode:=EGAHi;
  InitGraph(GraphDriver,GraphMode,'c:\tp\bgi');
  SetLineStyle(0,$FFFF,3);
  SetColor(15);
  x:=0;
  y:=1;
  z:=0;
  if j=0 then
  begin
    old_col:=Round(y*9+320);
    old_row:=Round(350-6.56*z);
    Line(0,348,639,348);
    Line(320,2,320,348);
    OutTextXY(628,330,'Y');
    OutTextXY(330,12,'Z')
  end;
  if j=1 then
  begin
    old_col:=Round(y*10+320);
    old_row:=Round(175-7.29*x);
    Line(0,175,639,175);
    Line(320,2,320,348);
    OutTextXY(628,160,'Y');
    OutTextXY(330,12,'X')
  end;
  if j=2 then
  begin
    old_col:=Round(y*9);
    old_row:=Round(350-6.56*z);
```

```
Line(0,348,638,348);
Line(320,2,320,348);
Line(320,348,648,140);
OutTextXY(628,330,'Y');
OutTextXY(330,12,'Z');
OutTextXY(628,112,'X')
end;
SetLineStyle(0,$FFFF,1);
dt:=0.01;
dt2:=dt/2;
for i:=0 to 8000 do
begin
  d0_x:=10*(y-x)*dt2;
  d0_y:=(-x*z+28*x-y)*dt2;
  d0_z:=(x*y-8*z/3)*dt2;
  xt:=x+d0_x;
  yt:=y+d0_y;
  zt:=z+d0_z;
  d1_x:=(10*(yt-xt))*dt2;
  d1_y:=(-xt*zt+28*xt-yt)*dt2;
  d1_z:=(xt*yt-8*zt/3)*dt2;
  xt:=x+d1_x;
  yt:=y+d1_y;
  zt:=z+d1_z;
  d2_x:=(10*(yt-xt))*dt;
  d2_y:=(-xt*zt+28*xt-yt)*dt;
  d2_z:=(xt*yt-8*zt/3)*dt;
  xt:=x+d2_x;
  yt:=y+d2_y;
  zt:=z+d2_z;
  d3_x:=(10*(yt-xt))*dt2;
  d3_y:=(-xt*zt+28*xt-yt)*dt2;
  d3_z:=(xt*yt-8*zt/3)*dt2;
  old_y:=y;
  x:=x+(d0_x+d1_x+d1_x+d2_x+d3_x)*third;
  y:=y+(d0_y+d1_y+d1_y+d2_y+d3_y)*third;
  z:=z+(d0_z+d1_z+d1_z+d2_z+d3_z)*third;
  if j=0 then
  begin
    col:=Round(y*9+320);
```

```
        row:=Round(350-6.56*z);
        if col<320 then
            if old_col>=320 then
                inc(color);
            if col>320 then
                if old_col<=320 then
                    inc(color)
                end;
            if j=1 then
                begin
                    col:=Round(y*10.0+320);
                    row:=Round(175-7.29*x);
                    if col<320 then
                        if old_col>=320 then
                            inc(color);
                        if col>320 then
                            if old_col<=320 then
                                inc(color)
                            end;
                        if j=2 then
                            begin
                                temp_x:=x*cx+y*cy+z*cz;
                                temp_y:=x*sx+y*sy+z*sz;
                                col:=Round(temp_x*8+320);
                                row:=Round(350-temp_y*5);
                                if col<320 then
                                    if old_col>=320 then
                                        inc(color);
                                    if col>320 then
                                        if old_col<=320 then
                                            inc(color)
                                        end;
                                    SetColor(color);
                                    Line(old_col,old_row,col,row);
                                    old_row:=row;
                                    old_col:=col
                                end;
                            end;
                        ch:=ReadKey
                    end
                end
            end.
```

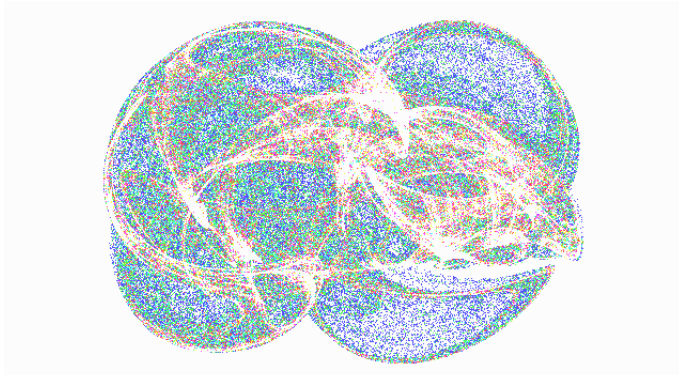
### 2.1.1 Άλλοι παράξενοι ελκυστές.

Ο ελκυστής Lorenz προχωρεί κατά τακτικό τρόπο από το ένα σημείο στο άλλο καθώς ο χρόνος αυξάνει έτσι, ώστε μπορούμε να σχεδιάσουμε μια καλή εικόνα αυτού τραβώντας γραμμές οι οποίες συνδέουν κάθε ζεύγος γειτονικών σημείων.

Τώρα ας θεωρήσουμε ένα διαφορετικό είδος παράξενου ελκυστή. Αυτός εδώ είναι ένα δυναμικό σύστημα που πρωτοπαρουσιάστηκε από τον Clifford A. Pickover. Αποτελείται από το σύστημα των εξισώσεων:

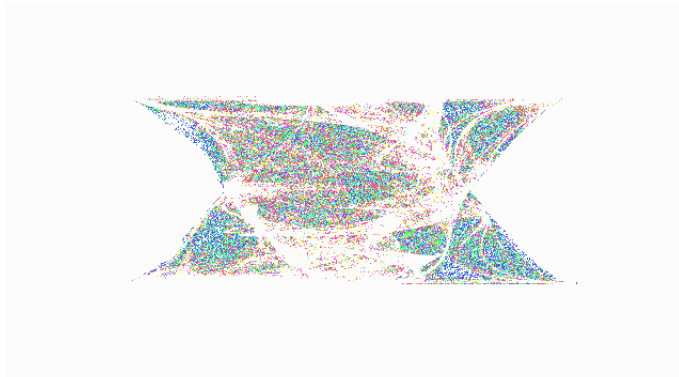
$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \sin(ay_n) - z_n \cos(bx_n) \\y_{n+1} &= z_n \sin(cx_n) - \cos(dy_n) \\z_{n+1} &= e \sin(x_n).\end{aligned}$$

Το ακόλουθο πρόγραμμα (βλ. [24]) σχεδιάζει τον ελκυστή προβάλλοντάς τον πρώτα στο  $XY$  και έπειτα στο  $YZ$  επίπεδο (βλ. Σχήματα 2.5, 2.6).



Σχήμα 2.5: Προβολή στο επίπεδο των  $XY$  ενός παράξενου ελκυστή.

```
{
strange = PROGRAM TO PLOT STRANGE ATTRACTOR
}
```



Σχήμα 2.6: Προβολή στο επίπεδο των  $YZ$  ενός παράξενου ελκυστή.

```
program strange;
uses
  Crt,Graph;
const
  max_col = 639;
  max_row = 349;
var
  Xmax,Xmin,Ymax,Ymin,X,Y,Z,deltaX,deltaY,
  Xtemp,Ytemp,Ztemp,a,b,c,d,e      : real;
  GraphDriver,GraphMode,col,row,j,color : integer;
  max_iterations,i                  : longint;
  ch                                 : char;
begin
  max_iterations:=50000;
  Xmax:=2.8;
  Xmin:=-2.8;
  Ymax:=2.0;
  Ymin:=-2.0;
  a:=2.24;
  b:=0.43;
```



```
c:=-0.65;
d:=-2.43;
e:=1.0;
X:=0;
Y:=0;
GraphDriver:=4;
GraphMode:=EGAHi;
InitGraph(GraphDriver,GraphMode,'c:\tp\bgi');
deltaX:=max_col/(Xmax-Xmin);
deltaY:=max_row/(Ymax-Ymin);
for j:=0 to 1 do
begin
  for i:=0 to max_iterations do
  begin
    Xtemp:=sin(a*Y)-Z*cos(b*X);
    Ytemp:=Z*sin(c*X)-cos(d*Y);
    Z:=e*sin(X);
    X:=Xtemp;
    Y:=Ytemp;
    if j=0
    then begin
      col:=Round((X-Xmin)*deltaX);
      row:=Round((Y-Ymin)*deltaY)
    end
    else begin
      col:=Round((Y-Xmin)*deltaX);
      row:=Round((Z-Ymin)*deltaY)
    end;
    if col>0 then
    if col<=max_col then
    if row>0 then
    if row<=max_row then
    begin
      color:=GetPixel(col,row);
      if color=0 then
      color:=8;
      if color<15 then
      color:=color+1;
      PutPixel(col,row,color)
    end
  end
end
end
```

```

end;
ch:=ReadKey;
ClearDevice
end
end.

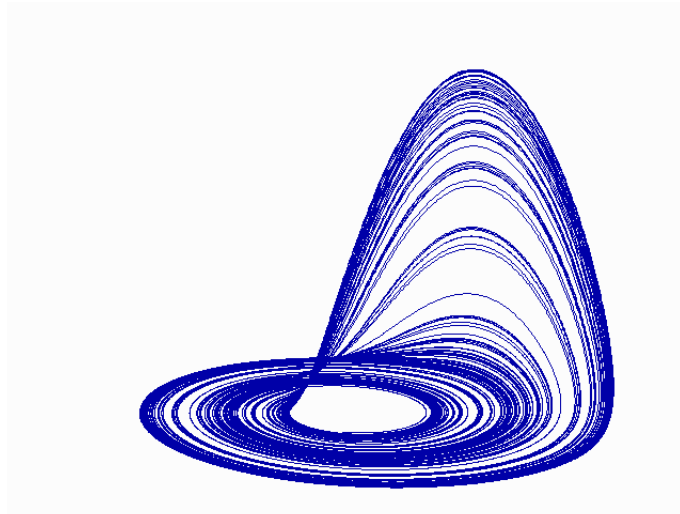
```

### Εφαρμογή 3

Ένας άλλος απλός ελκυστής, ο οποίος λόγω του εφευρέτη του ονομάστηκε ελκυστής *Rössler*, μπορεί να περιγραφεί από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
 dx/dt &= -(y + z) \\
 dy/dt &= x + (y/5) \\
 dz/dt &= 1/5 + z(x - 5.7).
 \end{aligned}$$

Παραθέτουμε ευθύς αμέσως το αντίστοιχο πρόγραμμα (βλ. Σχήμα 2.7).



Σχήμα 2.7: Ο ελκυστής Rössler.

```

program Roessler;
uses
  Crt,Graph,UtilUnit;
var

```

```
    i          : integer;
    x,y,z,A,B,C : extended;

procedure f;
const
    delta = 0.005;
var
    dx,dy,dz : extended;
begin
    dx:=- (y+z);
    dy:=x+y*A;
    dz:=B+z*(x-C);
    x:=x+delta*dx;
    y:=y+delta*dy;
    z:=z+delta*dz
end;

begin
    Xmin:=-15; Xmax:=15; Ymin:=-15; Ymax:=60;
    A:=0.2; B:=0.2; C:=5.7;
    x:=-10;
    y:=-1;
    z:=-1;
    f;
    GrafMode;
    repeat
        f;
        i:=i+1
    until i=1000;
    SetzeWeltPunkt(x,y+z+z);
    repeat
        f;
        ZieheWeltLinie(x,y+z+z)
    until keypressed;
    ExitGrafic;
end.
```

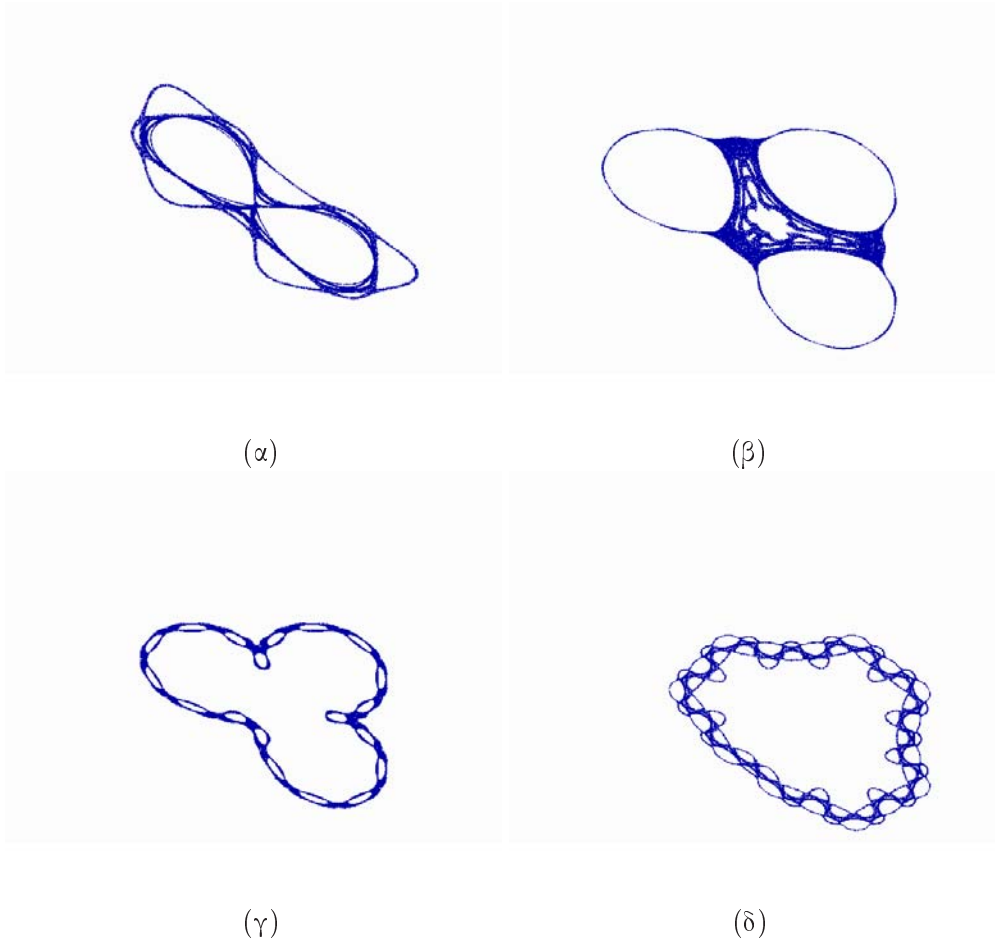
#### Εφαρμογή 4

Οι Martin (1982) και Dewdney (1986) παρουσίασαν περισσότερες αναδράσεις,

οι οποίες παράγαν πολύμορφα σχέδια. Θεωρούμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= y_n - \operatorname{sgn}(x_n)\sqrt{|x_n|} \\ y_{n+1} &= a - x_n\end{aligned}$$

όπου  $0 \leq a \leq 20$  και έχει επιλεγθεί ως σημείο εκκίνησης το  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Η συνάρτηση  $\operatorname{sgn}$  δίνει την τιμή  $-1$ , όταν το  $x_n$  είναι αρνητικό, αν  $x_n = 0$  δίνει 0 και για θετικό  $x_n$  την τιμή  $+1$  (βλ. Σχήματα 2.8(α), (β), (γ), (δ)).



Σχήμα 2.8: Ελκυστής των Martin και Dewdney.

```
program martin_it;
uses
```

```
Crt,Graph;
const
  maxcol = 640;
  maxrow = 480;
var
  a,x,y,xnew,fx,fy,xmin,xmax,ymin,
  ymax,xschirm,yschirm,n,nmax : extended;
  i,Gd,Gm                       : integer;

function sgn(x : extended) : integer;
begin
  if x<0
    then sgn:=-1
    else sgn:=1
end;

begin
  ClrScr;
  write('Eingabe: (0<a<10) a=');readln(a); {0.1 | 0.7 | 1.4 | 4}
  write('Eingabe: xmin=');readln(xmin); {-1 | -3 | -4 | -7}
  write('      xmax=');readln(xmax); { 1 | 3 | 4 | 7}
  write('      ymin=');readln(ymin); {-1 | -3 | -4 | -7}
  write('      ymax=');readln(ymax); { 1 | 3 | 4 | 7}
  write('Eingabe: Anzahl der Iterationen nmax=');readln(nmax); {40000}
  Gd:=detect;
  InitGraph(Gd,Gm,'c:\tp\bgi');
  if GraphResult<>grOK then
    Halt(1);
  fx:=maxcol/(xmax-xmin);
  fy:=maxrow/(ymax-ymin);
  x:=0;
  y:=0;
  n:=0;
  repeat
    xschirm:=(x-xmin)*fx;
    yschirm:=(y-ymin)*fy;
    PutPixel(round(xschirm),round(yschirm),3);
    xnew:=y-sgn(x)*sqrt(abs(x));
    y:=a-x;
    x:=xnew;
```

```

    n:=n+1
  until n>nmax;
  readln;
  CloseGraph
end.

```

Μπορεί κανείς να δοκιμάσει και το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= y_n - \operatorname{sgn}(x_n)\sqrt{|bx_n - c|} \\ y_{n+1} &= a - x_n\end{aligned}$$

με  $a = 3.5$ ,  $b = 1.2$  και  $c = 0$ .

**Ορισμός 2.1.4** Έστω  $\{X; f\}$  ένα δυναμικό σύστημα. Ένα περιοδικό σημείο της  $f$  περιόδου  $n$ , είναι ένα σημείο  $x \in X$  τέτοιο, ώστε  $f^{\circ n}(x) = x$  για κάποιο  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . Ο ελάχιστος τέτοιος ακέραιος λέγεται ελάχιστη ή πρωτίστη περίοδος του περιοδικού σημείου  $x$ . Συμβολίζουμε το σύνολο των περιοδικών σημείων της  $f$  περιόδου  $n$  με  $\operatorname{Per}_n(f)$ . Η τροχιά ενός περιοδικού σημείου της  $f$  λέγεται κύκλος ή περιοδική τροχιά της  $f$ . Η ελάχιστη περίοδος ενός κύκλου είναι το πλήθος των διαφορετικών σημείων που περιέχει. Μια περίοδος ενός κύκλου της  $f$  είναι μια περίοδος ενός σημείου στον κύκλο.

### Παραδείγματα

8. Έστω  $\{X; f\}$  ένα δυναμικό σύστημα. Ένα σταθερό σημείο της  $f$  είναι ένα περιοδικό σημείο της  $f$  περιόδου 1.  $\square$
9. Θεωρούμε το δυναμικό σύστημα  $\{\mathbb{R}; f\}$ . Αν θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = -x$ , τότε όλα τα σημεία εκτός του μηδενός είναι περιοδικά σημεία της  $f$  περιόδου 2. Αν θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^2 - 1$ , τότε τα σημεία 0 και  $-1$  βρίσκονται σε μια περιοδική τροχιά περιόδου 2.  $\square$
10. Έστω  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ , δηλ.  $S^1$  συμβολίζει τον μοναδιαίο κύκλο στο επίπεδο. Συμβολίζουμε ένα σημείο στον  $S^1$  με τη γωνία του  $\theta$  μετρημένη σε ακτίνια κατά τον συνηθισμένο τρόπο. Εκ τούτου ένα σημείο καθορίζεται από οιαδήποτε γωνία της μορφής  $\theta + 2k\pi$  για έναν ακέραιο  $k$ . Τώρα έστω  $f(\theta) = 2\theta$  (Λάβετε υπ' όψιν ότι  $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$  επί του κύκλου, έτσι αυτή η απεικόνιση είναι καλώς ωρισμένη). Τώρα  $f^{\circ n}(\theta) = 2^n\theta$  έτσι, ώστε η  $\theta$  είναι περιοδική περιόδου  $n$  τότε και μόνο, εάν  $2^n\theta = \theta + 2k\pi$  για κάποιον ακέραιο  $k$ , δηλαδή, τότε και μόνο, εάν  $\theta = 2k\pi/(2^n - 1)$ , όπου  $0 \leq k \leq 2^n$  είναι ένας ακέραιος. Εκ τούτου τα περιοδικά σημεία περιόδου  $n$  της  $f$  είναι οι  $(2^n - 1)$ -ες ρίζες της μονάδας.  $\square$

**Ορισμός 2.1.5** Έστω  $\{X; f\}$  ένα δυναμικό σύστημα και έστω  $x_f \in X$  ένα σταθερό σημείο της  $f$ . Το σημείο  $x_f$  λέγεται ελκυστικό σταθερό σημείο της  $f$ , εάν υπάρχει ένας αριθμός  $\varepsilon > 0$  έτσι, ώστε η  $f$  να απεικονίζει την κλειστή σφαίρα  $K(x_f, \varepsilon)$  στον εαυτό της και επιπλέον η  $f$  να είναι μια απεικόνιση συστολής πάνω στην κλειστή σφαίρα. Το σημείο  $x_f$  λέγεται απωστικό σταθερό σημείο της  $f$ , εάν υπάρχουν αριθμοί  $\varepsilon > 0$  και  $c > 1$  τέτοιοι, ώστε

$$\rho(f(x_f), f(y)) \geq c\rho(x_f, y) \text{ για κάθε } y \in K(x_f, \varepsilon).$$

Ένα περιοδικό σημείο της  $f$  περιόδου  $n$  είναι ελκυστικό, εάν είναι ένα ελκυστικό σταθερό σημείο της  $f^{\circ n}$ . Ένας κύκλος περιόδου  $n$  είναι ένας ελκυστικός κύκλος της  $f$ , αν ο κύκλος περιέχει ένα ελκυστικό περιοδικό σημείο της  $f$  περιόδου  $n$ . Ένα περιοδικό σημείο της  $f$  περιόδου  $n$  είναι απωστικό, αν είναι ένα απωστικό σταθερό σημείο της  $f^{\circ n}$ . Ένας κύκλος περιόδου  $n$  είναι ένας απωστικός κύκλος της  $f$ , αν ο κύκλος περιέχει ένα απωστικό περιοδικό σημείο της  $f$  περιόδου  $n$ .

### Παραδείγματα

11. Το σημείο  $x_f = 0$  είναι ένα ελκυστικό σταθερό σημείο για το δυναμικό σύστημα  $\{\mathbb{R}; \frac{1}{2}x\}$  και ένα απωστικό σταθερό σημείο για το δυναμικό σύστημα  $\{\mathbb{R}; 2x\}$ .  $\square$
12. Το σημείο  $z = 0$  είναι ένα ελκυστικό σταθερό σημείο και το  $z = \infty$  ένα απωστικό σταθερό σημείο για το δυναμικό σύστημα  $\{\mathbb{C}; (\cos 10^\circ + i\eta\mu 10^\circ)(0.9)z\}$ .  $\square$

**Ορισμός 2.1.6** Έστω  $\{X; f\}$  ένα δυναμικό σύστημα. Ένα σημείο  $x \in X$  λέγεται τελικώς περιοδικό σημείο της  $f$ , αν το  $x$  δεν είναι περιοδικό αλλά υπάρχει  $m > 0$  τέτοιο, ώστε  $f^{\circ(n+i)}(x) = f^{\circ i}(x)$  για κάθε  $i \geq m$ . Έτσι  $f^{\circ i}(x)$  είναι περιοδικό για  $i \geq m$ .

### Παραδείγματα

13. Έστω  $f(x) = x^2$ . Τότε το  $f(1) = 1$  είναι σταθερό, ενώ το  $f(-1) = 1$  είναι τελικώς σταθερό.  $\square$
14. Έστω  $f(\theta) = 2\theta$  επί του κύκλου. Λάβετε υπ' όψιν ότι το  $f(0) = 0$  είναι σταθερό. Εάν  $\theta = 2k\pi/2^n$ , τότε  $f^{\circ n}(\theta) = 2k\pi$  έτσι, ώστε η  $\theta$  είναι τελικώς σταθερή.  $\square$

**Ορισμός 2.1.7** Έστω  $p$  ένα περιοδικό σημείο περιόδου  $n$ . Ένα σημείο  $x$  είναι έμπροσθεν ασυμπτωτικό προς το  $p$ , αν  $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{\circ i n}(x) = p$ . Το σύνολο ευστάθειας του  $p$ , συμβολιζόμενο με  $W^s(p)$ , αποτελείται απ' όλα τα έμπροσθεν ασυμπτωτικά προς το  $p$  σημεία, δηλαδή

$$\begin{aligned} W^s(p) &= \{x \in X : f^{\circ i n}(x) \rightarrow p \text{ καθώς } i \rightarrow \infty\} \\ &= \{x \in X : \rho(f^{\circ i n}(x), p) \rightarrow 0 \text{ καθώς } i \rightarrow \infty\}. \end{aligned}$$

Αν το  $p$  είναι μη περιοδικό, μπορούμε ακόμα να ορίσουμε έμπροσθεν ασυμπτωτικά σημεία απαιτώντας  $\rho(f^{\circ i}(x), f^{\circ i}(p)) \rightarrow 0$  καθώς  $i \rightarrow \infty$ . Επίσης, αν η  $f$  είναι αντιστρέψιμη, μπορούμε να ορίσουμε όπισθεν ασυμπτωτικά σημεία θέτοντας  $i \rightarrow -\infty$  στον προηγούμενο ορισμό. Το σύνολο των σημείων που είναι όπισθεν ασυμπτωτικά προς το  $p$  καλείται σύνολο αστάθειας του  $p$  και συμβολίζεται με  $W^u(p)$ .

Σκοπός των δυναμικών συστημάτων είναι να κατανοήσουμε τη φύση όλων των τροχιών και να εξακριβώσουμε το σύνολο των τροχιών που είναι περιοδικές, τελικώς περιοδικές, ασυμπτωτικές κ.ο.κ. Γενικώς, αυτό είναι αδύνατο. Για παράδειγμα, αν η  $f(x)$  είναι ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο, τότε το να βρούμε επακριβώς τα περιοδικά σημεία περιόδου  $n$ , απαιτεί την επίλυση της εξίσωσης  $f^{\circ n}(x) = x$ , η οποία είναι μια πολυωνυμική εξίσωση βαθμού  $2^n$ . Γι' αυτό περιοριζόμαστε μόνο σε ποιοτικές ή γεωμετρικές τεχνικές ώστε να καταλάβουμε τη δυναμική ενός δοθέντος συστήματος. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να ψάξουμε για μια γεωμετρική εικόνα της συμπεριφοράς όλων των τροχιών ενός συστήματος.

Αυτή η γεωμετρική εικόνα παρέχεται από το διάγραμμα των φάσεων. Αυτό είναι μια εικόνα, πάνω στην ίδια την πραγματική ευθεία όπως αυτή αντιτίθεται προς το επίπεδο, όλων των τροχιών ενός συστήματος.

Η γραφική παράσταση της  $f(x)$  περιέχει βεβαίως πληροφορία σχετικώς με την πρώτη επανάληψη της  $f$ . Μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε ώστε να γίνει ορατή η συμπεριφορά των επαναλήψεων υψηλότερης τάξης, άρα και το διάγραμμα φάσεων, μέσω της ακόλουθης διαδικασίας η οποία καλείται γραφική ανάλυση.

### Εφαρμογή 5

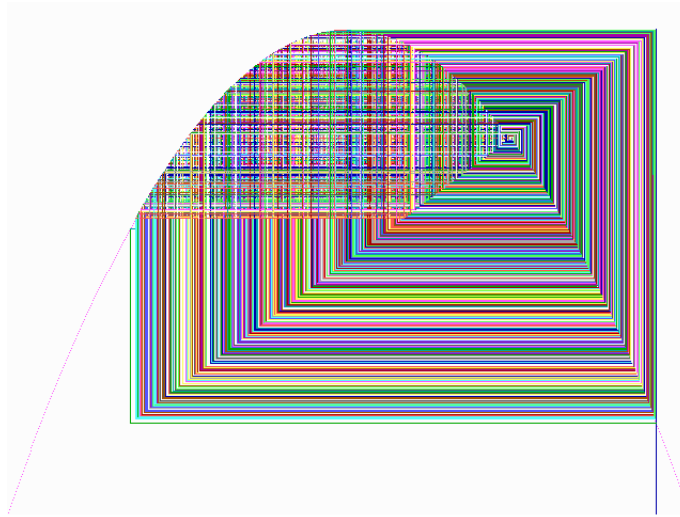
Υπάρχει μια πολύ ευχάριστη κατασκευή για αναπαράσταση των τροχιών ενός δυναμικού συστήματος της ειδικής μορφής  $\{\mathbb{R}; f(x)\}$ . Αυτή εκμεταλλεύεται τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Θα περιγράψουμε εδώ, πως χρησιμοποιείται προς αναπαράσταση της τροχιάς  $\{x_n = f^{\circ n}(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$  ενός σημείου  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Για απλότητα υποθέτουμε ότι  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Ζωγραφίστε το τετράγωνο  $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  και σκιαγραφήστε τη γραφική παράσταση της  $y = f(x)$  και της  $y = x$  για  $x \in [0, 1]$ . Ξεκινήστε από το σημείο  $(x_0, x_0)$  και συνδέστε το μέσω ενός ευθύγραμμου τμήματος με το σημείο  $(x_0, x_1 = f(x_0))$ . Συνδέστε αυτό το σημείο μέσω ενός ευθύγραμμου τμήματος με το σημείο  $(x_1, x_1)$ . Συνδέστε



αυτό το σημείο μέσω ενός ευθύγραμμου τμήματος με το σημείο  $(x_1, x_2 = f(x_1))$  και συνεχίστε ομοίως. Η τροχιά διακρίνεται πάνω στη σαρανταπέντε μοιρών ευθεία  $y = x$ , όπως και η ακολουθία των σημείων  $(x_0, x_0), (x_1, x_1), (x_2, x_2) \dots$ . Καλούμε το αποτέλεσμα αυτής της γεωμετρικής κατασκευής *ιστοδιάγραμμα*.

Είναι άμεσο το να γράψει κανείς κάποιες διαδικασίες οι οποίες να σχεδιάζουν ιστοδιαγράμματα σε μια οθόνη ενός υπολογιστή. Το ακόλουθο πρόγραμμα υλοποιεί αυτήν ακριβώς την απαίτηση. Το δυναμικό σύστημα που χρησιμοποιείται σε αυτήν την περίπτωση είναι αυτό του Παραδείγματος 2 (βλ. Σχήμα 2.9). Κάτι ανάλογο του `Web_Diagrams1` υπάρχει στο [1].



Σχήμα 2.9: Ένα ιστοδιάγραμμα.

```

program Web_Diagrams1;
uses
  Crt, Graph;
const
  maxcol = 640;
  maxrow = 480;
var
  ErrCode, n, Gd, Gm : integer;
  l, xn, k, deltax, y : real;

```

```
function f(x : real) : real;
begin
  f:=1*x*(1-x)
end;

begin
  repeat
    clrscr;
    write('Δώστε την παράμετρο λ : '); readln(λ); {3.79}
    write('Δώστε το σημείο εκκίνησης της τροχιάς : '); readln(xn); {0.95}
    deltax:=1/maxcol;
    Gd:=detect;
    InitGraph(Gd,Gm,'c:\tp\bgi');
    ErrCode:=GraphResult;
    if ErrCode=grOK
      then begin
        ClearDevice;
        k:=0;
        n:=GetMaxColor-1;
        repeat
          PutPixel(trunc(maxcol*k),maxrow-trunc(maxrow*f(k)),n);
          k:=k+deltax
        until k>1;
        MoveTo(trunc(xn*maxcol),maxrow);
        n:=0;
        repeat
          n:=n+1;
          y:=f(xn);
          SetColor(n);
          LineTo(trunc(xn*maxcol),maxrow-trunc(xn*maxrow));
          LineTo(trunc(xn*maxcol),maxrow-trunc(y*maxrow));
          xn:=y
        until keypressed
      end
      else writeln('Graphics error:',GraphErrorMsg(ErrCode));
    CloseGraph;
    write('Αν θέλεις να φύγεις πάτα <ESC> ');
    readln
  until readkey=#27
end.
```

Ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική αλλά αλλάζοντας λίγο τις γραμμές 38–42 επι-  
τυγχάνουμε επιτάχυνση του προγράμματος Web\_Diagrams1.

```
program Web_Diagrams2;
uses
  Crt, Graph;
const
  maxcol = 640;
  maxrow = 480;
var
  ErrCode, n, Gd, Gm      : integer;
  l, xn, k, deltax, xnold : real;

function f(x : real) : real;
begin
  f:=l*x*(1-x)
end;

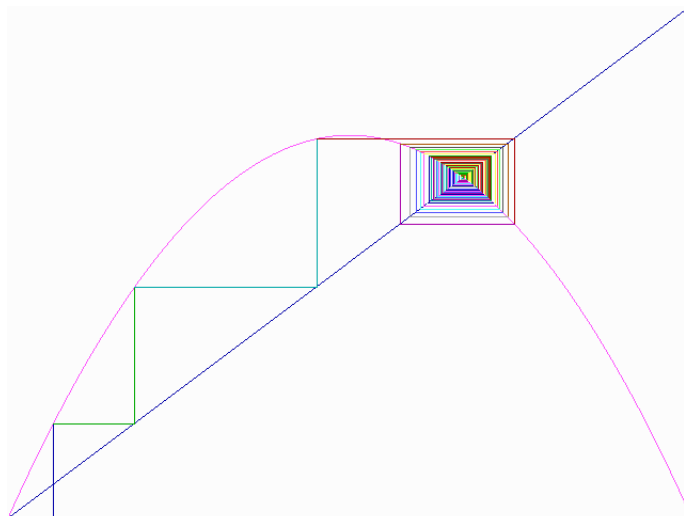
begin
  repeat
    clrscr;
    write('Δώστε την παράμετρο λ : '); readln(l);
    write('Δώστε το σημείο εκκίνησης της τροχιάς : '); readln(xn);
    deltax:=1/maxcol;
    Gd:=detect;
    InitGraph(Gd, Gm, 'c:\tp\bgi');
    ErrCode:=GraphResult;
    if ErrCode=grOK
    then begin
      ClearDevice;
      k:=0;
      n:=GetMaxColor-1;
      repeat
        PutPixel(trunc(maxcol*k), maxrow-trunc(maxrow*f(k)), n);
        k:=k+deltax
      until k>1;
      MoveTo(trunc(xn*maxcol), maxrow);
      n:=0;
      repeat
        n:=n+1;
        LineTo(trunc(xn*maxcol), maxrow-trunc(xn*maxrow));
```

```

        xnold:=xn;
        xn:=f(xn);
        SetColor(n);
        LineTo(trunc(xnold*maxcol),maxrow-trunc(xn*maxrow));
    until keypressed
end
else writeln('Graphics error:',GraphErrorMsg(ErrCode));
CloseGraph;
write('Αν θέλεις να φύγεις πάτα <ESC> ');
readln
until readkey=#27
end.

```

Το [7] για τον ίδιο σκοπό χρησιμοποιεί κάποιες διαδικασίες, τις οποίες εμείς τοποθετήσαμε σε ένα ενοποιημένο πρόγραμμα (βλ. Σχήμα 2.10). Το δυναμικό σύστημα που χρησιμοποιούμε εδώ είναι όμοιο με το προηγούμενο, απλώς έχει προστεθεί μια σταθερά.



Σχήμα 2.10: Ένα ιστοδιάγραμμα.

```

program Baustein2_1_2N1;
uses
    Crt,Graph,UtilUnit;

```

```
var
  population,kopplung : real;

function f(p,k : real) : real;
begin
  f:=p+k*p*(1-p)
end;

procedure ParabelUndWinkelhalbierende(population,kopplung : real);
var
  xKoordinate,deltax : real;
begin
  deltax:=(xmax-xmin)/maxcol;
  SetzeweltPunkt(xmin,ymin);
  ZieheWeltLinie(xmax,ymax);
  ZieheWeltLinie(xmin,ymin);
  xKoordinate:=xmin;
  SetColor(GetMaxColor-1);
  repeat
    ZieheWeltLinie(xKoordinate,f(xKoordinate,kopplung));
    xKoordinate:=xKoordinate+deltax
  until xKoordinate>xmax;
  GeheZuWeltPunkt(population,ymin)
end;

procedure GrafischeIteration;
var
  n : integer;
  vorigepopulation : real;
begin
  ParabelUndWinkelHalbierende(population,kopplung);
  n:=0;
  repeat
    n:=n+1;
    SetColor(n);
    ZieheWeltLinie(population,population);
    vorigepopulation:=population;
    population:=f(population,kopplung);
    ZieheWeltLinie(vorigepopulation,population)
  until keypressed
```

```
end;

procedure Hello;
begin
    Clrscr;
    InfoAusgeben('Grafische Iteration ');
    InfoAusgeben('----- ');
    NeueZeile(2);
    WeiterRechnen('Start: ');
    NeueZeile(2)
end;

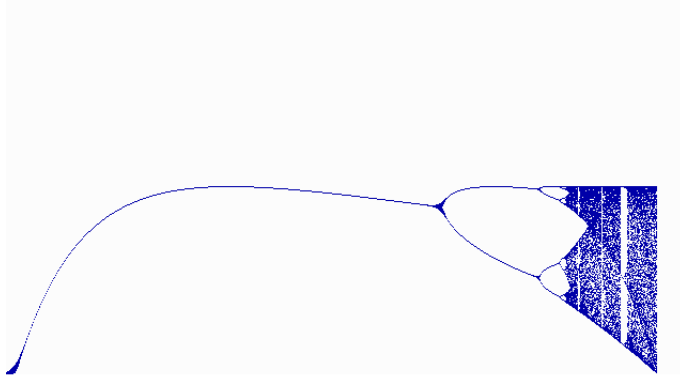
procedure Goodbye;
begin
    WeiterRechnen('Beenden: ')
end;

procedure Eingabe;
begin
    LiesReal('Xmin      >',Xmin);      {0}
    LiesReal('Xmax      >',Xmax);      {1.5}
    LiesReal('Ymin      >',Ymin);      {0}
    LiesReal('Ymax      >',Ymax);      {1.5}
    LiesReal('Population >',population); {0.1}
    LiesReal('Kopplung  >',kopplung)   {1.99}
end;

procedure BerechnungUndDarstellung;
begin
    EnterGrafic;
    GrafischeIteration;
    ExitGrafic
end;

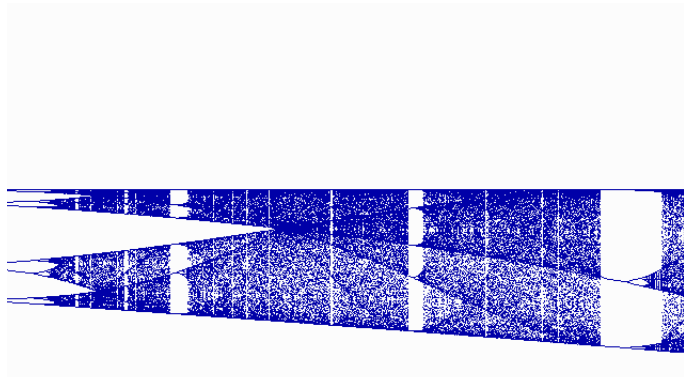
begin
    Hello;
    Eingabe;
    BerechnungUndDarstellung;
    Goodbye
end.
```

Ο καλύτερος τρόπος για να καταλάβουμε την πραγματικώς πολύπλοκη συμπεριφορά της απλής εξίσωσης με την οποία ασχολούμαστε είναι μέσω της χρήσης ενός γραφήματος. Αυτά τα γραφήματα αναφέρονται συνήθως ως *διαγράμματα διακλαδώσεων*. Περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης να βρει στα [6], [7], [11] και [24] (βλ. Σχήματα 2.11, 2.12).



Σχήμα 2.11: Ένα διάγραμμα διακλαδώσεων για την πληθυσμιακή εξίσωση.

```
program bifurc;
uses
  Crt, Graph;
var
  ch                : char;
  r,x,delta_r      : real;
  GraphDriver, GraphMode,i,j : integer;
  row,col          : longint;
begin
  r:=0.95;
  GraphDriver:=4;
  GraphMode:=EGAHi;
  InitGraph(GraphDriver, GraphMode, 'c:\tp\bgi');
  SetColor(15);
```



Σχήμα 2.12: Επέκταση του διαγράμματος διακλαδώσεων.

```
for j:=0 to 1 do
begin
  delta_r:=0.005;
  if j=1 then
  begin
    r:=3.55;
    delta_r:=0.0005
  end;
  for col:=0 to 639 do
  begin
    x:=0.5;
    r:=r+delta_r;
    i:=0;
    repeat
      x:=r*x*(1-x);
      { COMPUTATION FOR rx(1-x)
      row:=349 - Round(x*350); }
      { COMPUTATION FOR x(1-x) }
      row:=Round(349 -((x/r)*700));
      if i>64 then
```



```

        if row<350 then
          if row>=0 then
            if col>=0 then
              if col<640 then PutPixel(col,row,15);
                Inc (i)
            until (x>1000) or (x<-1000) or (i>255)
          end;
          ch:=ReadKey;
          ClearDevice
        end
      end.

```

Ένας φίλος του Robert Mays, ο James A. Yorke, έκανε μια αυστηρή μαθηματική ανάλυση της συμπεριφοράς της πληθυσμιακής εξίσωσης και τον Δεκέμβριο του 1975, μαζί με τον Tien-Yien Li δημοσίευσαν το [18]. Αυτό που κατάφεραν να δείξουν ήταν ότι, αν μια συνάρτηση όμοια προς την πληθυσμιακή εξίσωση έχει περίοδο τρία, τότε έχει περιόδους για κάθε άλλο αριθμό  $n$ .

Αν ο Mitchell Feigenbaum γνώριζε την εργασία των Robert Mays και James A. Yorke ή αν ήταν σε θέση να δει τα διαγράμματα διακλαδώσεων του Mays, δε θα έκανε τη σημαντική του ανακάλυψη. Αλλά το 1976, ο Feigenbaum, είδε την πληθυσμιακή εξίσωση από άλλη οπτική γωνία.

Ο Feigenbaum προσπάθησε να καθορίσει τις τιμές του  $\lambda$  κατά τις οποίες επιτυγχάνεται το μέγιστο για κάθε σύνολο διακλαδώσεων. Αν ξεκινήσουμε με τη μέγιστη τιμή του  $x$  και εκτελέσουμε  $2^n$  επαναλήψεις, όπου  $n$  είναι το πλήθος των διακλαδώσεων, θα γυρνάμε γύρω γύρω δια μέσου όλων των διακλαδούμενων τιμών του  $x$  και θα επιστρέψουμε ξανά στο μέγιστο. Έτσι, έχουμε τη γενική έκφραση:

$$x_{max} = (\lambda_n f)^{2m^n} x_{max}$$

το οποίο για την πληθυσμιακή εξίσωση είναι:

$$x_{max} = [\lambda_n x_{max} (1 - x_{max})]^{2m^n}.$$

Ψάχνοντας να βρει έναν τρόπο ώστε να μειώσει το πλήθος των υπολογισμών που απαιτούνται, ώστε να λυθεί η προηγούμενη εξίσωση, ανακάλυψε μια αξιοσημείωτη παγκόσμια σχέση μεταξύ γειτονικών ριζών. Αυτή αναφέρεται ως ο αριθμός Feigenbaum,

$$\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 4.6692016091029\dots$$

Το ακόλουθο πρόγραμμα παράγει τις πρώτες  $17\lambda_n$  τιμές για την πληθυσμιακή εξίσωση.

```
program feigenbm;
uses
  Crt;
var
  x,lambda,f,step_size,old_x,test,lambda_1,lambda_2,delta,
  init_step,old_lambda,new_step,old_step : extended;
  i,iterations                          : longint;
  j,sign                                 : integer;

begin
  ClrScr;
  lambda:=3.0;
  Writeln('n          Lambda          Delta');
  init_step:=1;
  for j:=1 to 19 do
  begin
    if j mod 2=0
    then sign:=-1
    else sign:=1;
    GotoXY(0,15+j);
    init_step:=init_step/4.67;
    step_size:=init_step;
    iterations:=2;
    for i:=1 to j-1 do
      iterations:=iterations*2;
    old_x:=0.5;
    lambda:=lambda+step_size;
    repeat
      x:=old_x;
      for i:=0 to iterations-1 do
        x:=lambda*x*(1-x);
      test:=(x-old_x)*sign;
      if test<0 then
      begin
        lambda:=lambda-step_size;
        step_size:=step_size/2
      end;
      old_lambda:=lambda;
      lambda:=lambda+step_size;
      GotoXY(1,j+3);
```

```

    write(j:2,' ',lambda:20:18,' ');
until old_lambda>=lambda;
if j>2 then
begin
    delta:=(lambda_1 - lambda_2)/(lambda - lambda_1);
    write(delta:20:18)
end;
lambda_2:=lambda_1;
lambda_1:=lambda
end
end.

```

Σε όλα τα επόμενα  $I$  είναι ένα κλειστό διάστημα του  $\mathbb{R}$  και  $\{\mathbb{R}; f\}$  είναι ένα δυναμικό σύστημα τέτοιο, ώστε η  $f$  είναι λεία, δηλ. κλάσης  $C^1$  (η  $f'(x)$  υπάρχει και είναι συνεχής για κάθε  $x \in I$ ).

**Ορισμός 2.1.8** Έστω  $p$  ένα περιοδικό σημείο πρωτίστης περιόδου  $n$ . Το σημείο  $p$  είναι υπερβολικό, αν  $|(f^{\circ n})'(p)| \neq 1$ . Ο αριθμός  $(f^{\circ n})'(p)$  καλείται πολλαπλασιαστής του περιοδικού σημείου.

**Πρόταση 2.1.4** Το  $p$  είναι ένα ελκυστικό περιοδικό σημείο της  $f$  περιόδου  $n$  τότε και μόνον, αν  $|(f^{\circ n})'(p)| < 1$ .  $\square$

**Πρόταση 2.1.5** Το  $p$  είναι ένα απωστικό περιοδικό σημείο της  $f$  περιόδου  $n$  τότε και μόνον, αν  $|(f^{\circ n})'(p)| > 1$ .  $\square$

## 2.2 Χάος

Σε όλα τα επόμενα,  $J$  είναι ένα κλειστό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ .

**Ορισμός 2.2.1** Η  $f: J \rightarrow J$  λέγεται τοπολογικώς μεταβατική, αν για κάθε ζεύγος ανοικτών συνόλων  $U, V \subset J$  υπάρχει ένας ακέραιος  $k > 0$  τέτοιος, ώστε  $f^{\circ k}(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Διαισθητικώς, μια τοπολογικώς μεταβατική απεικόνιση έχει σημεία τα οποία μετακινούνται τελικώς υπό επανάληψη από μια αυθαιρέτως μικρή περιοχή προς οιαδήποτε άλλη. Συνεπώς, το δυναμικό σύστημα δεν μπορεί να αποσυντεθεί σε δύο διάζευκτα ανοικτά σύνολα τα οποία είναι αμετάβλητα υπό την απεικόνιση.

**Πρόταση 2.2.1** Αν η τροχιά  $\{f^{\circ k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$  είναι πυκνή στο ανοικτό σύνολο  $U \subset J$  για κάποιο  $x \in U$ , τότε η  $f$  είναι τοπολογικώς μεταβατική.  $\square$

**Ορισμός 2.2.2** Ένα δυναμικό σύστημα  $\{X; f\}$  είναι τοπολογικώς μεταβατικό, αν η  $f$  είναι τοπολογικώς μεταβατική.

### Παράδειγμα

1. Το δυναμικό σύστημα  $\{[0, 1]; f(x) = \min(2x, 2 - 2x)\}$  είναι τοπολογικώς μεταβατικό. Πράγματι, έστω ότι  $U, V$  είναι οιοδήποτε ζεύγος ανοικτών διαστημάτων στο μετρικό χώρο  $([0, 1], \rho_E)$ . Προφανώς κάθε εφαρμογή του μετασχηματισμού αυξάνει το μήκος του διαστήματος  $V$  κατά τέτοιον τρόπο, ώστε αυτό τελικώς επικαλύπτει το  $U$ .

**Ορισμός 2.2.3** Η  $f: J \rightarrow J$  έχει ευαίσθητη εξάρτηση σε αρχικές συνθήκες, αν υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο, ώστε για κάθε  $x \in J$  και κάθε περιοχή  $U$  του  $x$  υπάρχει  $y \in U$  και ένας ακέραιος  $n \geq 0$  τέτοιος, ώστε  $\rho(f^{\circ n}(x), f^{\circ n}(y)) > \delta$ .

Διαισθητικώς, μια απεικόνιση έχει ευαίσθητη εξάρτηση από αρχικές συνθήκες, αν υπάρχουν σημεία αυθαιρέτως κοντά στο  $x$  τα οποία τελικώς απομακρύνονται από το  $x$  τουλάχιστον  $\delta$ , μετά από επανάληψη της  $f$ . Άρα, σημεία τα οποία βρίσκονται αρχικώς κοντά το ένα στο άλλο δεν παραμένουν κοντά μετά από επαναλήψεις της  $f$ .

### Παραδείγματα

2. Η δευτεροβάθμια απεικόνιση  $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$  με  $\mu > 2 + \sqrt{5}$  έχει ευαίσθητη εξάρτηση σε αρχικές συνθήκες στο  $\Lambda$ , όπου  $\Lambda$  είναι ένα σύνολο τύπου Cantor. Για να το δούμε, επιλέγουμε  $\delta < \text{diam}(A_0)$ , όπου  $A_0$  είναι το κενό μεταξύ  $I_0$  και  $I_1$ . Έστω  $x, y \in \Lambda$ . Αν  $x \neq y$ , τότε  $S(x) \neq S(y)$ , έτσι τα δρομολόγια των  $x$  και  $y$  πρέπει να διαφέρουν σε τουλάχιστον ένα μέρος, έστω το  $n$ -ατο. Αλλά αυτό σημαίνει ότι οι  $F_\mu^{\circ n}(x)$  και  $F_\mu^{\circ n}(y)$  βρίσκονται σε αντίθετες πλευρές του  $A_0$  έτσι, ώστε

$$|F_\mu^{\circ n}(x) - F_\mu^{\circ n}(y)| > \delta. \quad \square$$

3. Μια άρρητη περιστροφή του κύκλου είναι τοπολογικώς μεταβατική, αλλά μη ευαίσθητη σε αρχικές συνθήκες, αφού όλα τα σημεία παραμένουν στην ίδια απόσταση χωριστά μετά την επανάληψη.  $\square$

**Ορισμός 2.2.4** Το δυναμικό σύστημα  $\{X; f\}$  είναι ευαίσθητο σε αρχικές συνθήκες, αν η  $f$  έχει ευαίσθητη εξάρτηση από αρχικές συνθήκες.

### Παράδειγμα

4. Το δυναμικό σύστημα  $\{[0, 1]; 2x \pmod{1}\}$  είναι ευαίσθητο σε αρχικές συνθήκες.  $\square$

**Ορισμός 2.2.5** Έστω  $V$  ένα σύνολο. Η  $f: V \rightarrow V$  λέγεται ότι είναι χαώδης στο  $V$ , αν

1. η  $f$  είναι τοπολογικώς μεταβατική,
2. η  $f$  έχει ευαίσθητη εξάρτηση σε αρχικές συνθήκες και
3. το σύνολο των περιοδικών σημείων της  $f$  είναι πυκνό στο  $V$ .

**Παράδειγμα**

5. Η απεικόνιση του Παραδείγματος 1.7 είναι χαώδης στο  $[0, 1]$ .  $\square$

## 2.3 Το σύνολο Mandelbrot και τα σύνολα Julia

Σε αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με τη δυναμική δευτεροβαθμίων πολυωνύμων της μορφής  $Q_c(z) = z^2 + c$  στο μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή  $z, c \in \mathbb{C}$ .

Το δευτεροβάθμιο αυτό πολυώνυμο μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή μιας απλής ανάδρασης

$$\begin{aligned} z_{n+1} = z_n^2 + c = f(z_n, c) &\Leftrightarrow x_{n+1} + iy_{n+1} \\ &= (x_n + iy_n)^2 + a + ib = x_n^2 + 2ix_ny_n + i^2y_n^2 + a + ib \\ &= x_n^2 - y_n^2 + a + 2ix_ny_n + ib \\ &= x_n^2 - y_n^2 + a + i(2x_ny_n + b) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a = f_1(x_n, y_n, a) \\ y_{n+1} = 2x_ny_n + b = f_2(x_n, y_n, b) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

### 2.3.1 Το σύνολο Mandelbrot

Ο Αμερικανός μαθηματικός B.B. Mandelbrot επιχείρησε πρώτος το 1980 να παραστήσει γραφικώς το από τον ίδιο επονομαζόμενο σύνολο και να περιγράψει επακριβώς τη μορφολογία του. Λόγω του υπολογιστικού κόστους, κρίθηκε απαραίτητη η χρησιμοποίηση ενός υπολογιστή.

**Ορισμός 2.3.1** Το σύνολο Mandelbrot είναι το υποσύνολο του  $c$ -επιπέδου

$$\begin{aligned} M &= \{c \in \mathbb{C} : \text{το } \{Q_c^{o n}(0)\}_{n \geq 1} \text{ είναι φραγμένο}\} \\ &= \{c \in \mathbb{C} : Q_c^{o n}(0) \not\rightarrow \infty \text{ για } n \rightarrow \infty\} \\ &= \{c \in \mathbb{C} : z_n \not\rightarrow \infty \text{ για } n \rightarrow \infty\} \\ &= \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x_n \text{ ή } y_n \not\rightarrow \infty \text{ για } n \rightarrow \infty\}. \end{aligned}$$

### Εφαρμογή 1

Αυτός ο ορισμός μας οδηγεί γρήγορα σε μια πρώτη εκδοχή ενός αλγορίθμου για τη γραφική παράσταση του συνόλου  $M$ .

Επιλέξτε σε κάθε πέρασμα της ανάδρασης (2.1) την αρχική τιμή  $x_0 = y_0 = 0$ . Οι παράμετροι  $a$  και  $b$  διατρέχουν συστηματικώς όλα τα σημεία ενός ορθογώνιου τομέα του επίπεδου των  $a-b$ . Σημαδέψτε το σημείο  $(a, b)$ , εάν η ανάδραση δεν οδηγείται στον ελκυστή  $\infty$ .

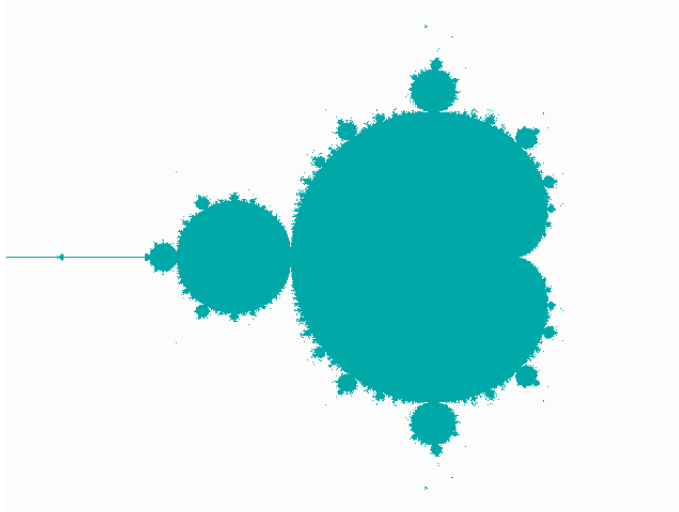
Αυτή η εκδοχή δεν είναι εντελώς κατάλληλη ως προπαρασκευή ενός προγράμματος, διότι δεν περατώνεται σε πεπερασμένο χρόνο.

Κατ' αρχάς, περιοριζόμαστε μόνο στο πεπερασμένο πλήθος των σημείων της οθόνης. Πως όμως θα εξακριβωθεί αν μια ανάδραση συγκλίνει ή όχι;

Αφήνουμε μια ανάδραση να τρέξει περιορισμένα, το πολύ  $n_{max}$  φορές. Αν επιπροσθέτως η απόσταση των σημείων  $z_n = (x_n, y_n)$  από την αρχή δεν ξεπεράσει μια συγκεκριμένη οριακή απόσταση  $g$ , τότε θα υπολογιστεί και θα χρωματισθεί το σημείο  $(a, b)$  του συνόλου  $M$ . Αυτοί οι περιορισμοί καθορίζουν ένα παραγόμενο από τον υπολογιστή σύνολο Mandelbrot

$$M_{\text{υπολ}} = \{c \in G : |z_{n_{max}}| < g\},$$

όπου  $G$  είναι μια πεπερασμένη περιοχή του μιγαδικού επίπεδου (επίπεδου των  $a-b$ ). (Βλ. Σχήμα 2.13).



Σχήμα 2.13: Το σύνολο Mandelbrot.

```
program Mandelbrotmenge1;
{ x^2+y^2>g }
uses
  Crt,Graph;
const
  maxcol = 640;
  maxrow = 480;
var
  i,j,n,nmax,Gd,Gm                : integer;
  a,b,da,db,amin,amax,bmin,bmax,x,y,xneu,g : extended;
begin
  clrscr;
  write('amin = ');readln(amin); {-2}
  write('amax = ');readln(amax); {1}
  write('bmin = ');readln(bmin); {-1.15}
  write('bmax = ');readln(bmax); {1.15}
  write('Μέγιστο πλήθος των επαναλήψεων μιας ανάδρασης: nmax = ');
  readln(nmax); {80}
  write('Το τετράγωνο της οριακής απόστασης από την αρχή: g = ');
  readln(g); {4}
  da:=(amax-amin)/maxcol;
  db:=(bmax-bmin)/maxrow;
  Gd:=detect;
  InitGraph(Gd,Gm,'c:\tp\bgi');
  if GraphResult<>grOK then
    halt(1);
  ClearDevice;
  for i:=0 to maxcol-1 do
  begin
    a:=amin+i*da;
    for j:=0 to maxrow-1 do
    begin
      b:=bmin+j*db;
      x:=0;
      y:=0;
      n:=0;
      repeat
        xneu:=sqr(x)-sqr(y)+a;
        y:=2*x*y+b;
        x:=xneu;
```

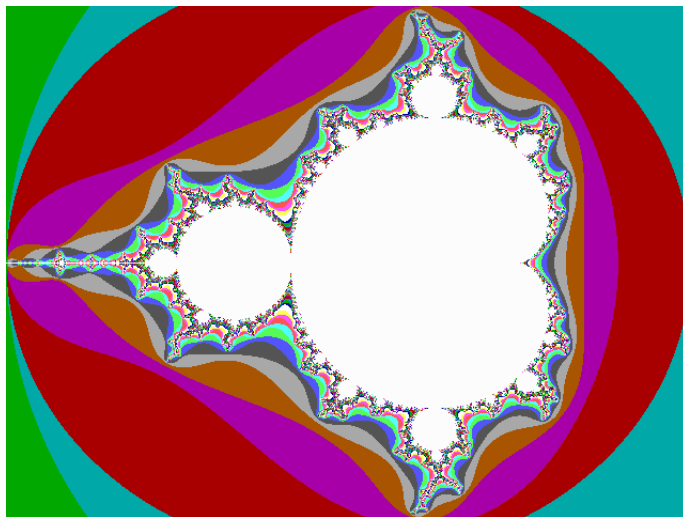
```

        n:=n+1;
until (n=nmax) or ((sqr(x)+sqr(y))>g);
if n=nmax then
    PutPixel(i,j,3)
end
end;
readln;
CloseGraph
end.

```

### Διαγράμματα ταχυτήτων

Το περιβάλλον του συνόλου Mandelbrot είναι ποικίλως δομημένο, όταν τα σημεία χρωματιστούν σε σχέση με το πλήθος των επαναλήψεων οι οποίες απαιτούνται, ώστε να αφήσουν να μεγαλώσει η απόσταση ενός σημείου  $(x_n, y_n)$  πέρα από ωρισμένα όρια (π.χ.  $g = 10000$ ). Αν ένα σημείο  $(a, b)$  βρίσκεται κοντά στο σύνολο Mandelbrot, τότε μέσω της (2.1) θα παραχθεί μια ακολουθία σημείων  $(x_n, y_n), n = 1, 2, \dots$ , η οποία αργά αργά απομακρύνεται από το σύνολο Mandelbrot και απαιτεί επομένως ένα μεγάλο πλήθος αναδραστικών βημάτων για να υπερβεί μια συγκεκριμένη οριακή απόσταση. Ένα σημείο  $(a, b)$  που βρίσκεται ακόμα μακρύτερα θα οδηγηθεί γρηγορότερα πέρα από την οριακή απόσταση. Αυτή η συμπεριφορά της ταχύτητας μπορεί να φανεί σε ένα γραφικό μέσω του ακόλουθου προγράμματος (βλ. Σχήμα 2.14).



Σχήμα 2.14: Το σύνολο Mandelbrot μέσα από ένα διάγραμμα ταχυτήτων.



```
program Mandelbrotmenge2;
{  $x^2+y^2>g$  }
uses
  Crt,Graph;
const
  maxcol = 640;
  maxrow = 480;
var
  i,j,n,nmax,Gd,Gm                : integer;
  a,b,da,db,amin,amax,bmin,bmax,x,y,xneu,g : extended;

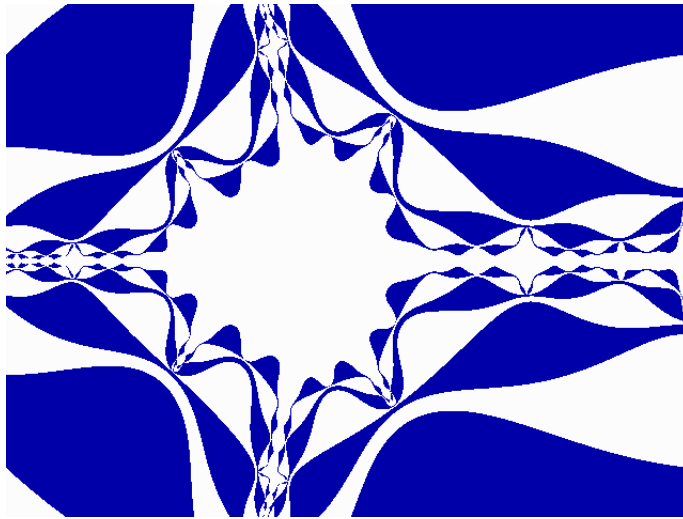
begin
  clrscr;
  write('amin = ');readln(amin); {-2}
  write('amax = ');readln(amax); {1}
  write('bmin = ');readln(bmin); {-1.15}
  write('bmax = ');readln(bmax); {1.15}
  write('Μέγιστο πλήθος των επαναλήψεων μιας ανάδρασης: nmax = ');
  readln(nmax); {80}
  write('Το τετράγωνο της οριακής απόστασης από την αρχή: g = ');
  readln(g); {4}
  da:=(amax-amin)/maxcol;
  db:=(bmax-bmin)/maxrow;
  Gd:=detect;
  InitGraph(Gd,Gm,'c:\tp\bgi');
  if GraphResult<>grOK then
    halt(1);
  ClearDevice;
  for i:=0 to maxcol-1 do
  begin
    a:=amin+i*da;
    for j:=0 to maxrow-1 do
    begin
      b:=bmin+j*db;
      x:=0;
      y:=0;
      n:=0;
      repeat
        xneu:=sqr(x)-sqr(y)+a;
        y:=2*x*y+b;
```

```

        x:=xneu;
        n:=n+1;
until (n=nmax) or ((sqr(x)+sqr(y))>g);
if n<nmax then
    PutPixel(i,j,n mod 16)
end
end;
readln;
CloseGraph
end.

```

Οι περιοχές ομοίων ταχυτήτων έχουν σχεδιαστεί αρκετά μικρές στο άμεσο περιβάλλον του συνόλου Mandelbrot. Δεν μπορούν να παρασταθούν από μια οθόνη ως συνεκτικές συνιστώσες και επηρεάζονται τότε από ενοχλήσεις. Αυτή η περιοχή σχηματίζει μια κορώνα πάνω από το σύνολο Mandelbrot και δεν πρέπει να χρωματισθεί. Χρωματίζουμε λοιπόν μόνο, όταν το  $n$  βρίσκεται κάτω από έναν επιλεγμένο αριθμό  $m$ , όπου βεβαίως είναι  $m < nmax$ . Η κορώνα επιτυγχάνεται βεβαίως για εκείνα τα  $n$ , για τα οποία ισχύει  $m \leq n \leq nmax$  (βλ. Σχήμα 2.15).



Σχήμα 2.15: Το σύνολο Mandelbrot μέσα από μία χρωματική κορώνα.

```

program Mandelbrotmenge3;
{ x^2+y^2>g }
uses

```

```
Crt,Graph;
const
  maxcol = 640;
  maxrow = 480;
var
  i,j,m,n,nmax,Gd,Gm           : integer;
  a,b,da,db,amin,amax,bmin,bmax,x,y,xneu,g : extended;

begin
  clrscr;
  write('amin = ');readln(amin); {-1.825}
  write('amax = ');readln(amax); {-1.675}
  write('bmin = ');readln(bmin); {-0.05}
  write('bmax = ');readln(bmax); {0.05}
  write('Μέγιστο πλήθος των επαναλήψεων μιας ανάδρασης: nmax = ');
  readln(nmax); {80}
  write('Το τετράγωνο της οριακής απόστασης από την αρχή: g = ');
  readln(g); {4}
  write('m = ');readln(m); {15}
  da:=(amax-amin)/maxcol;
  db:=(bmax-bmin)/maxrow;
  Gd:=detect;
  InitGraph(Gd,Gm,'c:\tp\bgi');
  if GraphResult<>grOK then
    halt(1);
  ClearDevice;
  for i:=0 to maxcol-1 do
  begin
    a:=amin+i*da;
    for j:=0 to maxrow-1 do
    begin
      b:=bmin+j*db;
      x:=0;
      y:=0;
      n:=0;
      repeat
        xneu:=sqr(x)-sqr(y)+a;
        y:=2*x*y+b;
        x:=xneu;
        n:=n+1;
```

```

until (n=nmax) or ((sqr(x)+sqr(y))>g);
if n=nmax
then PutPixel(i,j,n)
else if n<m then
PutPixel(i,j,n mod 2)
end
end;
readln;
CloseGraph
end.

```

Μπορούμε για πειραματικούς σκοπούς να χρησιμοποιήσουμε άλλα κριτήρια απόστασης εκτός της ευκλείδειας. Εμείς κάνουμε χρήση των

$$\alpha) |x| + |y| > g$$

$$\beta) |x| > g$$

$$\gamma) \max(|x|, |y|) > g.$$

### 2.3.2 Τα σύνολα Julia

**Ορισμός 2.3.2** Έστω  $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ένα πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές. Το σύνολο Julia του  $p$ , το οποίο συμβολίζεται με  $J(p)$ , είναι η κλειστότητα του συνόλου των απωστικών περιοδικών σημείων του  $p$ , δηλ.

$$J(p) = \{w \in \mathbb{C} : f^{\circ n}(w) = w \text{ και } |(f^{\circ n})'(w)| > 1 \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N}\}^-.$$

Το συμπλήρωμα του συνόλου Julia καλείται σύνολο Fatou ή σύνολο ευστάθειας του  $p$  και συμβολίζεται με  $S(p)$  ή  $F(p)$ .

**Ορισμός 2.3.3** Έστω  $p: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  ένα πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερου από ένα. Το γεμισμένο σύνολο Julia,  $K(p)$ , του  $p$  είναι το σύνολο των σημείων των οποίων οι τροχιές δεν τείνουν στο άπειρο, δηλ.,

$$\begin{aligned} K(p) &= \{z \in \overline{\mathbb{C}} : p^{\circ n}(z) \not\rightarrow \infty \text{ καθώς } n \rightarrow \infty\} \\ &= \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \text{το } \{|p^{\circ n}(z)|\}_{n=0}^{\infty} \text{ είναι φραγμένο}\} \\ &= \overline{\mathbb{C}} \setminus W^s(\infty). \end{aligned}$$

**Ορισμός 2.3.4** Το γεμισμένο σύνολο Julia,  $K_c$ , του  $Q_c$  είναι το

$$K_c = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : Q_c^{\circ n}(z) \not\rightarrow \infty \text{ καθώς } n \rightarrow \infty\}.$$

Σημειώστε ότι το  $K_c$  περιέχει πάντα το σύνολο Julia του  $Q_c$ .

**Θεώρημα 2.3.1** Έστω  $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ένα πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερου από ένα. Έστω ότι  $K(p)$  συμβολίζει το γεμισμένο σύνολο Julia του  $p$  και έστω ότι  $J(p)$  συμβολίζει το σύνολο Julia του  $p$ . Τότε  $K(p), J(p) \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ . Περαιτέρω,

$$p(J(p)) = J(p) = p^{-1}(J(p)) \text{ και } p(K(p)) = K(p) = p^{-1}(K(p))$$

δηλαδή τα  $J(p)$  και  $K(p)$  είναι πλήρως αμετάβλητα. Το σύνολο  $V_\infty = \mathbb{C} \setminus J(p)$  είναι κατά τόξα συνεκτικό.  $\square$

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος υπάρχει στο [8], ενώ μια απόδειξη της ειδικής περίπτωσης όπου  $K(p) = K_c$  υπάρχει στο [1]. Εμείς εδώ, απλώς θα αναφερθούμε σε μια εφαρμογή του θεωρήματος αυτού, η οποία στο [1] ονομάζεται Αλγόριθμος των χρόνων διαφυγής.

### Εφαρμογή 2

Εδώ περιγράφουμε ένα αριθμητικό σχετικό με γραφικά σε υπολογιστή πείραμα για να συγκρίνουμε το, απαιτούμενο από τις τροχιές διαφορετικών σημείων, πλήθος των επαναλήψεων ώστε αυτά να διαφύγουν από μια σφαίρα μεγάλης ακτίνας και η οποία έχει κέντρο την αρχή.

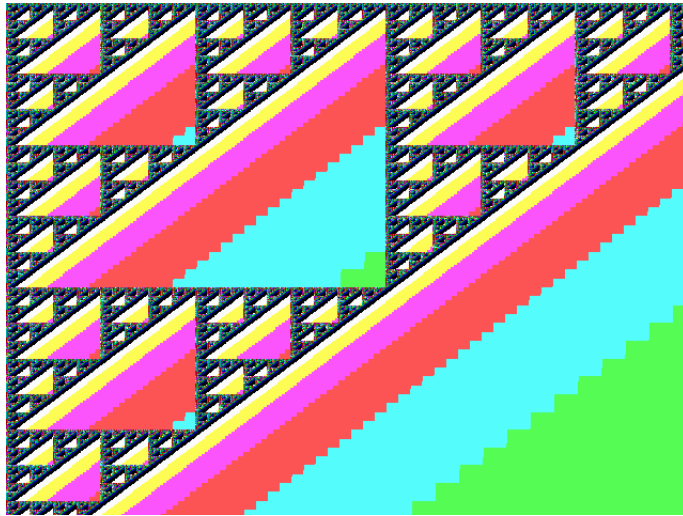
Έστωσαν λοιπόν το δυναμικό σύστημα  $\{\mathbb{R}^2; f\}$ ,  $(a, b)$  και  $(c, d)$  οι συντεταγμένες της κάτω αριστερής και της άνω δεξιάς γωνίας αντιστοίχως ενός κλειστού, γεμισμένου ορθογωνίου  $W \subset \mathbb{R}^2$ . Έστω ότι  $M_1, M_2$  είναι δύο θετικοί ακέραιοι και ορίζουμε μια διευθέτηση σημείων του  $W$  με

$$x_{p,q} = \left( a + p \frac{(c-a)}{M_1}, b + q \frac{(d-b)}{M_2} \right) \text{ για } p = 0, 1, \dots, M_1, q = 0, 1, \dots, M_2.$$

Στο πείραμα αυτά τα σημεία θα παρασταθούν από εικονοστοιχεία σε μια συσκευή εμφάνισης γραφικών. Συγκρίνουμε τις τροχιές  $\{f^{\circ n}(x_{p,q})\}_{n=0}^\infty$  για  $p = 1, 2, \dots, M_1$ ,  $q = 1, 2, \dots, M_2$ . Έστω  $R$  ένας θετικός αριθμός αρκετά μεγάλος. Ορίζουμε

$$V = \mathbb{R}^2 \setminus K(0, R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > R\}.$$

Έστω ότι  $numits$  συμβολίζει έναν θετικό ακέραιο. Το ακόλουθο πρόγραμμα υπολογίζει ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων  $\{f^{\circ 1}(x_{p,q}), f^{\circ 2}(x_{p,q}), \dots, f^{\circ n}(x_{p,q})\}$  που ανήκουν στην τροχιά των  $x_{p,q} \in W$  για κάθε  $p = 1, 2, \dots, M_1$ ,  $q = 1, 2, \dots, M_2$ . Το συνολικό πλήθος των υπολογιζόμενων σε μια τροχιά σημείων είναι το πολύ  $numits$ . Αν το σύνολο των υπολογιζόμενων σημείων της τροχιάς του  $x_{p,q}$  δεν περιλαμβάνει κάποιο σημείο στο  $V$  όταν  $n = numits$ , τότε ο υπολογισμός περνάει στην επόμενη τιμή των  $(p, q)$ . Διαφορετικά, το εικονοστοιχείο που αντιστοιχεί στο  $x_{p,q}$  εμφανίζεται με ένα χρώμα το οποίο εξαρτάται από τον πρώτο ακέραιο  $n$  τέτοιον, ώστε  $f^{\circ n}(x_{p,q}) \in V$  και τότε ο υπολογισμός περνά στην επόμενη τιμή των  $(p, q)$ . Αυτό μας δίνει μια γραφική μέθοδο, ώστε να συγκρίνουμε πόσο χρόνο χρειάζονται



Σχήμα 2.16: Τροποποιημένο τρίγωνο Sierpiński ως ένα διαφεύγον δυναμικό σύστημα.

οι τροχιές διαφορετικών σημείων του  $W$  να φθάσουν το  $V$ , δηλ. να διαφύγουν από το  $W$  (βλ. Σχήμα 2.16).

```

program Escape_Time_Algorithm;
{
    (2x,2y-1)  αν y>=0.5
  f(x,y) = (2x-1,2y)  αν x>=0.5 και y<0.5
            (2x,2y)   διαφορετικά
}
uses
  Crt,Graph;
const
  M1 = 640;
  M2 = 480;
var
  R,numits,p,q : 0..maxint;
  n,Gd,Gm      : integer;
  a,b,c,d,x,y  : extended;
  done         : boolean;

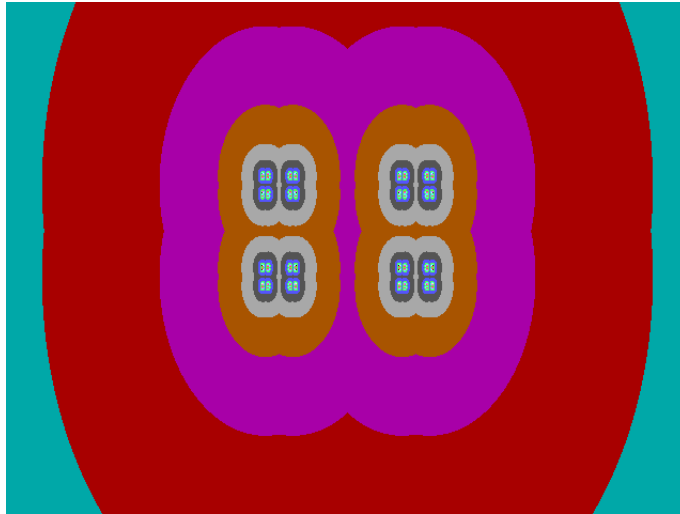
begin
  numits:=105;{65}
  a:=0;

```

```
b:=0;
c:=5*10E-18;
d:=c;
R:=200;
Gd:=detect;
InitGraph(Gd,Gm,'c:\tp\bgi');
if GraphResult<>grOK then
  halt(1);
ClearDevice;
for p:=1 to M1 do
  for q:=1 to M2 do
    begin
      x:=a+(c-a)*p/M1;
      y:=b+(-b+d)*q/M2;
      n:=1;
      repeat
        if y>0.5
          then begin
            x:=2*x;
            y:=2*y-1
          end
        else if x>0.5
          then begin
            x:=2*x-1;
            y:=2*y
          end
        else begin
            x:=2*x;
            y:=2*y
          end;
        if x*x+y*y>R then
          begin
            PutPixel(p,q,n);
            done:=true
          end;
        n:=n+1
      until (n>numits) or done
    end;
  readln;
CloseGraph
```

end.

Τώρα παραθέτουμε ένα άλλο παράδειγμα ενός δυναμικού συστήματος του οποίου οι τροχιές προσπαθούν να διαφύγουν από τον ελκυστή ενός ΕΣΣ. Αυτή τη φορά πρόκειται για ΕΣΣ του οποίου ο ελκυστής έχει μη κενό εσωτερικό (βλ. Σχήμα 2.17).



Σχήμα 2.17: Ένα διαφεύγον δυναμικό σύστημα.

```

program Escape_Time_Algorithm;
uses
  Crt, Graph;
const
  M1 = 640;
  M2 = 480;
var
  R, numits, p, q      : 0..maxint;
  n, Gd, Gm           : integer;
  a, b, c, d, newx, x, y, s : extended;
  done                : boolean;

begin
  numits:=20;
  a:=0;
  b:=0;

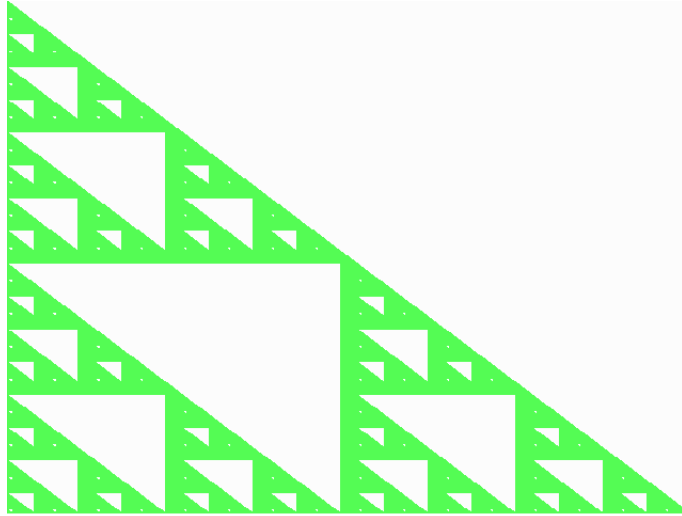
```



```
c:=2;
d:=1;
R:=300;
Gd:=detect;
InitGraph(Gd,Gm,'c:\tp\bgi');
if GraphResult<>grOK then
  halt(1);
ClearDevice;
s:=sqrt(5);
for p:=1 to M1 do
  for q:=1 to M2 do
    begin
      done:=false;
      x:=a+(c-a)*p/M1;
      y:=b+(-b+d)*q/M2;
      n:=1;
      repeat
        if x>0
          then begin
            newx:=s*y;
            y:=-s*x+s
          end
          else begin
            newx:=s*y;
            y:=-s*x-s
          end;
        x:=newx;
        if x*x+y*y>R
          then begin
            PutPixel(p,q,n);
            done:=true
          end;
        n:=n+1;
      until (n>numits) or done
    end;
  readln;
  CloseGraph
end.
```

Το ακόλουθο πρόγραμμα είναι σχεδόν το ίδιο με το πρώτο μόνο που διαφοροποιήσαμε τα  $a, b, c, d$  και τις γραμμές 51–55. Αν η τιμή του *numits* είναι πολύ υψηλή,

τότε πολύ λίγα σημεία δε θα διαφεύγουν από το  $W$  και θα εμφανισθεί μια φτωχή εικόνα του τριγώνου Sierpiński. Αν η τιμή του  $numits$  είναι πολύ χαμηλή, τότε θα παραχθεί μια έντονη εικόνα του τριγώνου Sierpiński (βλ. Σχήμα 2.18).



Σχήμα 2.18: Τροποποιημένο τρίγωνο Sierpiński ως ένα διαφεύγον δυναμικό σύστημα.

```

program Escape_Time_Algorithm;
{
    (2x,2y-1) αν y>=0.5
    f(x,y) = (2x-1,2y) αν x>=0.5 και y<0.5
            (2x,2y)   διαφορετικά
}
uses
    Crt,Graph;
const
    M1 = 639;
    M2 = 479;
var
    R,numits,p,q : 0..maxint;
    n,Gd,Gm      : integer;
    a,b,c,d,x,y  : extended;
    done         : boolean;

```

```
begin
  numits:=10;
  a:=0.025;
  b:=0.025;
  c:=1;
  d:=1;
  R:=200;
  Gd:=detect;
  InitGraph(Gd,Gm,'c:\tp\bgi');
  if GraphResult<>grOK then
    halt(1);
  ClearDevice;
  for p:=0 to M1 do
    for q:=0 to M2 do
      begin
        done:=false;
        x:=a+(c-a)*p/M1;
        y:=b+(-b+d)*q/M2;
        n:=1;
        repeat
          n:=n+1;
          if y>0.5
            then begin
              x:=2*x;
              y:=2*y-1
            end
          else if x>0.5
            then begin
              x:=2*x-1;
              y:=2*y
            end
          else begin
              x:=2*x;
              y:=2*y
            end;
        until done;
        if n=numits then
          PutPixel(p,q,n);
        if x*x + y*y > R then
          n:=numits;
        n:=n+1;
      end;
    end;
  end;
```

```

        until (n>numits) or done
    end;
    readln;
    CloseGraph
end.

```

**Ορισμός 2.3.5** Αν  $w$  είναι ένα ελκυστικό περιοδικό σημείο της  $f$  περιόδου  $n$ , γράφουμε

$$A(w) = \{z \in \mathbb{C} : f^{\circ kn}(z) \rightarrow w \text{ καθώς } k \rightarrow \infty\}$$

για τη λεκάνη έλξης της τροχιάς, δηλ. λεκάνη έλξης είναι το σύνολο όλων των σημείων τα οποία προσεγγίζουν μια δοθείσα ελκυστική περιοδική τροχιά.

Προφανώς η λεκάνη έλξης είναι ένα ανοικτό σύνολο.

### Εφαρμογή 3

Θα επαληθεύσουμε υπολογιστικώς ότι μια καμπύλη «νιφάδας χιονιού» είναι ένα σύνορο της λεκάνης έλξης του δυναμικού συστήματος  $\{\mathbb{R}^2; f\}$  όπου για κάθε  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} (0, -1) & \text{αν } y < 0 \\ (3x, 3y) & \text{αν } y \geq 0 \text{ και } x < -y/\sqrt{3} + 1 \\ ((9 - 3x - 3\sqrt{3}y)/2, (3\sqrt{3} - 3\sqrt{3}x + 3)/2) & \text{αν } y \geq 0 \text{ και } -y/\sqrt{3} + 1 \leq x < 3/2 \\ ((3x - 3\sqrt{3}y)/2, ((3\sqrt{3}x + 3y - 6\sqrt{3})/2)/2) & \text{αν } y \geq 0 \text{ και } 3/2 \leq x < y/\sqrt{3} + 2 \\ (9 - 3x, 3y) & \text{αν } y \geq 0 \text{ και } x \geq y/\sqrt{3} + 2 \end{cases}$$

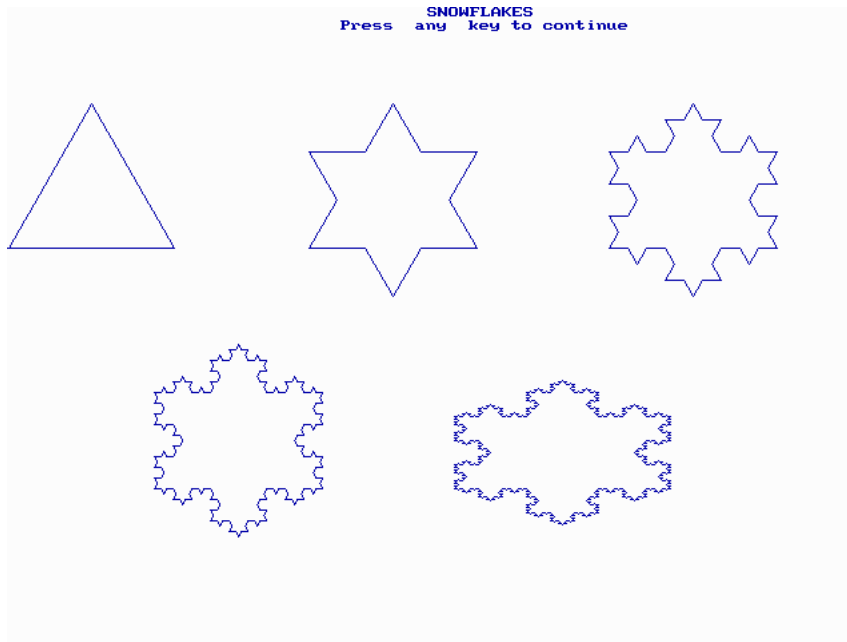
(βλ. Σχήματα 2.19, 2.20, 2.21).

```

program schneeflocke;
uses
  Crt, Graph, UtilUnit;
var
  i, t, vz : integer;
  s       : real;
  ch      : char;

procedure ZACKEN1(s : real; t : integer);
begin
  if t=0
  then forwd(round(s))
  else begin
        ZACKEN1(s/3, t-1);

```



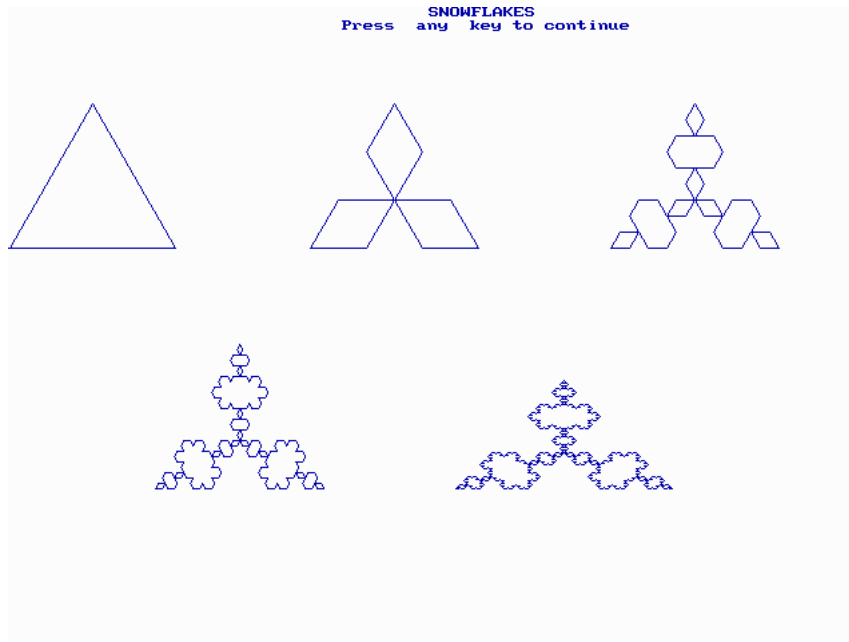
Σχήμα 2.19: Χιονονιφάδες.

```

        turn(-60);
        ZACKEN1(s/3,t-1);
        turn(120);
        ZACKEN1(s/3,t-1);
        turn(-60);
        ZACKEN1(s/3,t-1)
    end
end;

procedure ZACKEN2(s : real;t,vz : integer);
begin
    if t=0
    then forwd(round(s))
    else begin
        ZACKEN2(s/3,t-1,vz);
        turn(-(vz*60));
    end
end;

```



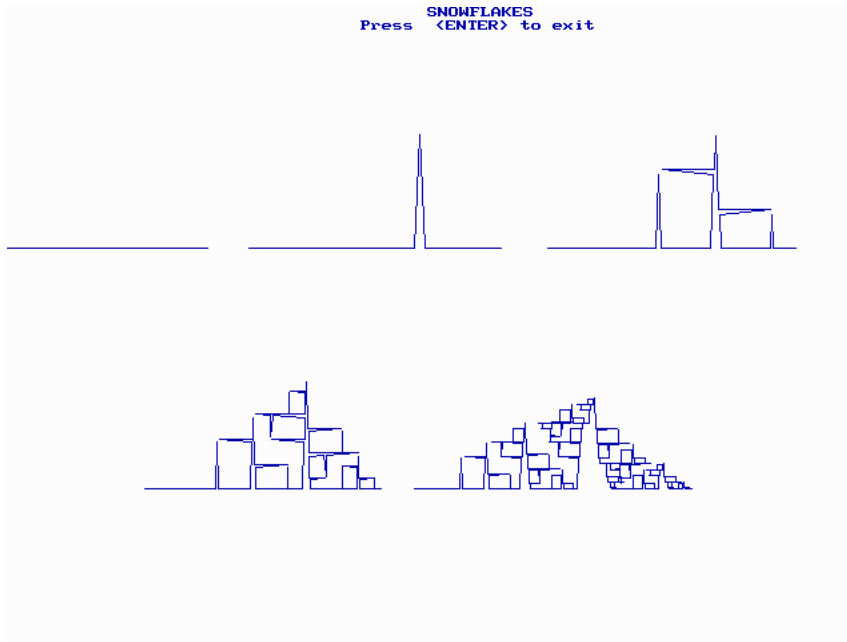
Σχήμα 2.20: Χιονονιφάδες (συνέχεια).

```

        ZACKEN2(s/3,t-1,vz);
        turn(vz*120);
        ZACKEN2(s/3,t-1,vz);
        turn(-(vz*60));
        ZACKEN2(s/3,t-1,vz)
    end
end;

procedure ZACK_VAR(s : real;t : integer);
begin
    if t=0
    then forwd(round(s))
    else begin
        ZACK_VAR((s/19.942)*6,t-1);
        turn(-87);
        ZACK_VAR((s/19.942)*9,t-1);
    end
end;

```



Σχήμα 2.21: Χιονονιφάδες (συνέχεια).

```
        turn(174);
        ZACK_VAR((s/19.942)*9,t-1);
        turn(-87);
        ZACK_VAR((s/19.942)*13,t-1);
    end
end;

begin
    GrafMode;
    OutTextXY(315,0,'SNOWFLAKES');
    OutTextXY(250,10,'Press any key to continue');
    xco:=0;
    yco:=300;
    GeheZuBildPunkt(xco,yco);
    hd:=0;
    s:=125;
```

```
for t:=0 to 4 do
begin
  if t<>0 then
    if (t mod 3=0) then
      begin
        xco:=110;
        yco:=yco-180;
        GeheZuBildPunkt(xco,yco)
      end;
    for i:=1 to 3 do
      begin
        ZACKEN1(s,t);
        turn(120);
      end;
    xco:=xco+225;
    GeheZuBildPunkt(xco,yco)
  end;
  ch:=readkey;
  ClearDevice;
  OutTextXY(315,0,'SNOWFLAKES');
  OutTextXY(250,10,'Press any key to continue');
  xco:=0;
  yco:=300;
  GeheZuBildPunkt(xco,yco);
  s:=125;
  vz:=-1;
  for t:=0 to 4 do
  begin
    if t<>0 then
      if (t mod 3=0) then
        begin
          xco:=110;
          yco:=yco-180;
          GeheZuBildPunkt(xco,yco)
        end;
      for i:=1 to 3 do
        begin
          ZACKEN2(s,t,vz);
          turn(120);
        end;
    end;
```



```

        xco:=xco+225;
        GeheZuBildPunkt(xco,yco)
    end;
    ch:=readkey;
    ClearDevice;
    OutTextXY(315,0,'SNOWFLAKES');
    OutTextXY(265,10,'Press <ENTER> to exit');
    xco:=150;
    yco:=300;
    GeheZuBildPunkt(xco,yco);
    hd:=180;
    s:=190;
    vz:=-1;
    for t:=0 to 4 do
    begin
        if t<>0 then
            if (t mod 3=0) then
                begin
                    xco:=280;
                    yco:=yco-180;
                    GeheZuBildPunkt(xco,yco)
                end;
                ZACK_VAR(s,t);
                xco:=xco+410;
                GeheZuBildPunkt(xco,yco)
            end;
        ExitGrafic
    end.

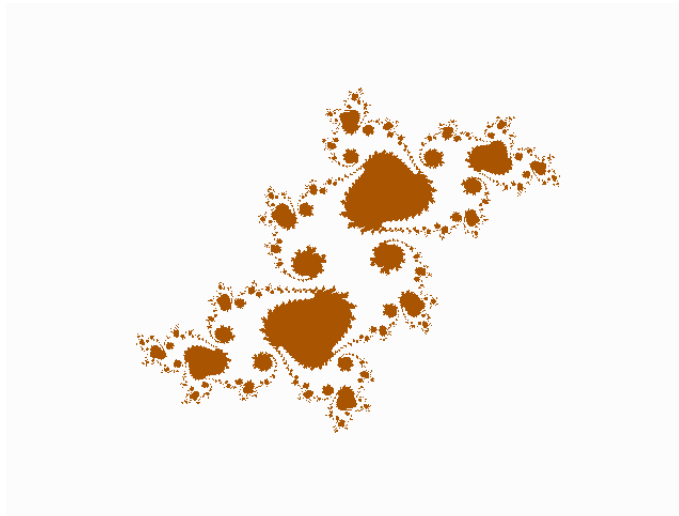
```

#### Εφαρμογή 4

Η ανάδραση  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  παράγει τα σύνολα Julia κατά απλό τρόπο. Σε σχέση με την κατασκευή του συνόλου Mandelbrot αλλάζουν οι ρόλοι των  $c$  και  $z$ . Η διεργασία περνάει τώρα στο επίπεδο των  $x$ - $y$ : για μια ειδική ανάδραση επιλέγεται  $c = a + ib$  ως σταθερά και η αρχική τιμή  $z_0 = x_0 + iy_0$  επιλέγεται συστηματικώς από μια περιοχή  $X_{min} \leq x_0 \leq X_{max}$ ,  $Y_{min} \leq y_0 \leq Y_{max}$ .

Συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι

$$\begin{aligned}
 K_c &= \{z_0 \in \mathbb{C} : z_n \not\rightarrow \infty \text{ για } n \rightarrow \infty\} \\
 &= \{(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x_n \text{ ή } y_n \not\rightarrow \infty \text{ για } n \rightarrow \infty\}.
 \end{aligned}$$



Σχήμα 2.22: Ένα σύνολο Julia μέσα από ένα διάγραμμα ταχυτήτων.

Έξαιτίας αυτού έπεται ότι υπάρχουν οσαδήποτε πολλά σύνολα Julia, διότι κάθε επιλογή του  $c$  καθορίζει και ένα διαφορετικό σύνολο Julia  $K_c$ , εν τούτοις σε μια ανάδραση αντιστοιχεί μόνο ένα σύνολο Mandelbrot (βλ. Σχήμα 2.22).

```

program Juliamenge1;
uses
  Crt,Graph;
const
  maxcol = 640;
  maxrow = 480;
var
  i,j,n,nmax,Gd,Gm           : integer;
  a,b,dx,dy,xmin,xmax,ymin,ymax,x,y,xneu,g : extended;
begin
  clrscr;
  write('xmin = ');readln(xmin); {-2}
  write('xmax = ');readln(xmax); {2}
  write('ymin = ');readln(ymin); {-1.6}
  write('ymax = ');readln(ymax); {1.6}
  write('a = ');readln(a); {-0.08}
  write('b = ');readln(b); {0.655}

```

```

write('Μέγιστο πλήθος των επαναλήψεων μιας ανάδρασης: nmax = ');
readln(nmax); {70}
write('Οριακή απόσταση από την αρχή: g = ');
readln(g); {4}
dx:=(xmax-xmin)/maxcol;
dy:=(ymax-ymin)/maxrow;
Gd:=detect;
InitGraph(Gd,Gm,'c:\tp\bgi');
if GraphResult<>grOK then
  halt(1);
ClearDevice;
for i:=0 to maxcol-1 do
  for j:=0 to maxrow-1 do
    begin
      x:=xmin+i*dx;
      y:=ymin+j*dy;
      n:=0;
      repeat
        xneu:=sqr(x)-sqr(y)+a;
        y:=2*x*y+b;
        x:=xneu;
        n:=n+1;
      until (n=nmax) or (sqr(x)+sqr(y)>sqrt(g));
      if n=nmax then
        PutPixel(i,j,n)
    end;
  readln;
CloseGraph
end.

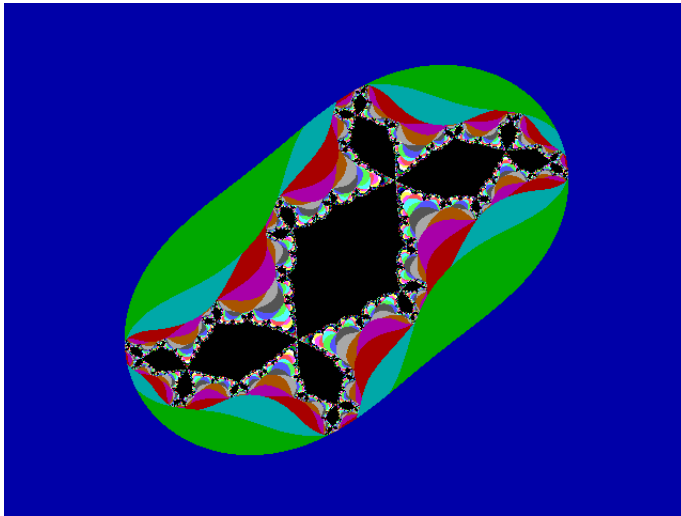
```

Όπως και στο σύνολο του Mandelbrot έτσι και εδώ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τεχνική για εμφάνιση του διαγράμματος ταχυτήτων (βλ. Σχήμα 2.23).

```

program Juliamenge2;
uses
  Crt,Graph;
const
  maxcol = 640;
  maxrow = 480;
var

```



Σχήμα 2.23: Ένα σύνολο Julia μέσα από ένα διάγραμμα ταχυτήτων.

```

i,j,n,nmax,Gd,Gm                : integer;
a,b,dx,dy,xmin,xmax,ymin,ymax,x,y,xneu,g : extended;
begin
  clrscr;
  write('xmin = ');readln(xmin); {-2}
  write('xmax = ');readln(xmax); {2}
  write('ymin = ');readln(ymin); {-1.6}
  write('ymax = ');readln(ymax); {1.6}
  write('a = ');readln(a); {-0.12}
  write('b = ');readln(b); {0.781}
  write('Μέγιστο πλήθος των επαναλήψεων μιας ανάδρασης: nmax = ');
  readln(nmax); {70}
  write('Οριακή απόσταση από την αρχή: g = ');
  readln(g); {4}
  dx:=(xmax-xmin)/maxcol;
  dy:=(ymax-ymin)/maxrow;
  Gd:=detect;
  InitGraph(Gd,Gm,'c:\tp\bgi');
  if GraphResult<>grOK then
    halt(1);
  ClearDevice;
  for i:=0 to maxcol-1 do

```

```

for j:=0 to maxrow-1 do
begin
  x:=xmin+i*dx;
  y:=ymin+j*dy;
  n:=0;
  repeat
    xneu:=sqr(x)-sqr(y)+a;
    y:=2*x*y+b;
    x:=xneu;
    n:=n+1;
  until (n=nmax) or (sqr(x)+sqr(y)>sqrt(g));
  if n<nmax then
    PutPixel(i,j,n mod 16)
  end;
readln;
CloseGraph
end.

```

Προηγουμένως μάθαμε, πως να ορίζουμε κάποιους ελκυστές ΕΣΣ και γεμισμένα σύνολα Julia με τη βοήθεια του αλγορίθμου των χρόνων διαφυγής τον οποίο εφαρμόζαμε σε ωρισμένα δυναμικά συστήματα. Τώρα θα εξηγήσουμε πως τα σύνολα Julia ενός τετραγωνικού μετασχηματισμού μπορούν να θεωρηθούν ως οι ελκυστές κατάλληλων ΕΣΣ.

**Θεώρημα 2.3.2** Έστω  $(Y, \rho)$  ένας μετρικός χώρος. Έστω  $X \subset Y$  συμπαγές και μη κενό. Έστω  $f: X \rightarrow Y$  συνεχής και τέτοια, ώστε  $X \subset f(X)$ . Τότε

1) ένας μετασχηματισμός

$$W: \mathbb{H}(X) \rightarrow \mathbb{H}(X)$$

ορίζεται από την  $W(A) = f^{-1}(A)$  για κάθε  $A \in \mathbb{H}(X)$ ,

2) η  $W$  έχει ένα σταθερό σημείο  $A \in \mathbb{H}(X)$ , που δίνεται από την

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{\circ(-n)}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{\circ n}(X).$$

Υποθέτουμε ότι η  $f$  πληροί την επιπρόσθετη συνθήκη ώστε το  $f(O)$  να είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του μετρικού χώρου  $(f(X), \rho)$  οποτεδήποτε  $O \subset X$  είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του μετρικού χώρου  $(X, \rho)$ . Τότε

3) ο  $W$  είναι ένας συνεχής μετασχηματισμός από τον μετρικό χώρο  $(\mathbb{H}(X), h(\rho))$  εντός του εαυτού του και

- 4) αν η  $f$  έχει πεδίο ορισμού όλο το  $Y$  αντί μόνο του  $X$ , αλλά και  $f^{-1}(X) \subset X$  καθώς επίσης και  $X \subset f(X)$ , τότε τα παραπάνω εφαρμόζονται και οι (1),(2) και (3) ισχύουν.  $\square$

**Θεώρημα 2.3.3** Έστω  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Υποθέτουμε ότι το δυναμικό σύστημα  $\{\overline{\mathbb{C}}; f(z) = z^2 - \lambda\}$  έχει έναν ελκυστικό κύκλο  $\{z_1, z_2, \dots, z_p\} \subset \mathbb{C}$ . Έστω  $\varepsilon$  ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός. Έστω ότι  $X$  συμβολίζει τη σφαίρα Riemann  $\overline{\mathbb{C}}$  χωρίς  $(p+1)$  ανοικτές σφαίρες ακτίνας  $\varepsilon$ . (Η ακτίνα μετρείται χρησιμοποιώντας τη σφαιρική μετρική). Μια σφαίρα επικεντρώνεται σε κάθε σημείο του κύκλου και μια σφαίρα επικεντρώνεται στο σημείο του απείρου. Ορίζουμε ένα ΕΣΣ με

$$\{X; w_1(z) = \sqrt{z + \lambda}, \quad w_2(z) = -\sqrt{z + \lambda}\}.$$

Τότε ο μετασχηματισμός  $W$  στον  $\mathbb{H}(X)$ , ο οποίος ορίζεται από την

$$W(B) = w_1(B) \cup w_2(B)$$

για κάθε  $B \in \mathbb{H}(X)$ , απεικονίζει τον  $\mathbb{H}(X)$  στον εαυτό του, συνεχώς, υπό τη μετρική Hausdorff του  $\mathbb{H}(X)$ .

Περαιτέρω η  $W: \mathbb{H}(X) \rightarrow \mathbb{H}(X)$  έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο,  $J_\lambda$ , το σύνολο Julia του  $z^2 - \lambda$ . Επίσης

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W^{\circ n}(B) = J_\lambda$$

για κάθε  $B \in \mathbb{H}(X)$ . Τα ίδια αποτελέσματα ισχύουν επίσης αν η τροχιά της αρχής  $\{f^{\circ n}(0)\}$ , συγκλίνει προς το σημείο του απείρου και  $X = \overline{\mathbb{C}} \setminus S(\infty, \varepsilon)$ .  $\square$

**Θεώρημα 2.3.4** Ο ελκυστής  $A(\lambda)$  του ΕΣΣ  $\{\mathbb{C}; \lambda z - 1, \lambda z + 1\}$  είναι ολικώς ασύνδετος, αν  $|\lambda| < 0.5$  και συνεκτικός, αν  $1 > |\lambda| > 1/\sqrt{2}$ . Το σύνορο του αντίστοιχου συνόλου Mandelbrot περιέχεται στον δακτύλιο  $1/2 \leq |\lambda| \leq 1/\sqrt{2}$ .  $\square$

**Πρόταση 2.3.1** Υποθέτουμε ότι  $Q_c^{\circ n}(0) \not\rightarrow \infty$ . Έστω  $U_1 = \{z \in \mathbb{C} : Q_c^{\circ n}(z) \rightarrow \infty\}$ . Τότε υπάρχει ένας αναλυτικός ομοιομορφισμός  $\phi_c: U_1 \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$  τέτοιος, ώστε  $\phi_c(Q_c(z)) = (\phi_c(z))^2$ . Περαιτέρω, το  $J(Q_c)$  είναι το σύνορο του  $U_1$ .  $\square$

**Πόρισμα 2.3.1** Αν  $Q_c^{\circ n}(0) \not\rightarrow \infty$ , τότε το  $K_c$  είναι συνεκτικό.  $\square$

**Πρόταση 2.3.2** Υποθέτουμε ότι  $Q_c^{\circ n}(0) \rightarrow \infty$ . Τότε το  $J(Q_c)$  αποτελείται από απείρως πολλές διάζευκτες συνεκτικές συνιστώσες.  $\square$

Ισοδυνάμως από το Πόρισμα 2.3.1 και την Πρόταση 2.3.2 έχουμε ότι

$$M = \{c \in \mathbb{C} : K_c \text{ είναι συνεκτικό}\}.$$

# Παράρτημα Α'

## Η ΒΑΣΙΚΗ ΜΟΝΑΔΑ

```
unit UtilUnit;
interface
uses
  Crt,Graph;
const
  maxcol = 640;
  maxrow = 480;
type
  Tstring = string[80];
var
  BildName           : Tstring;
  Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real;
  GraphDriver,GraphMode,color,hd,xco,yco,startx,starty : integer;
(*-----UTILITY1-----*)
procedure LiesReal(information : Tstring;var wert : real);
procedure LiesInteger(information : Tstring;var wert : integer);
procedure LiesString(information : Tstring;var wert : Tstring);
procedure InfoAusgeben(information : Tstring);
procedure WeiterRechnen(information : Tstring);
procedure NeueZeile(n : integer);
(*-----UTILITY1-----*)
(*-----GRAFIC-----*)
procedure SetzeBildPunkt(xs,ys : integer);
procedure GeheZuBildPunkt(xs,ys : integer);
procedure SetzeWeltPunkt(xw,yw : real);
procedure GeheZuWeltPunkt(xw,yw : real);
procedure ZieheBildLinie(xs,ys : integer);
```

```
procedure ZieheWeltLinie(xw,yw : real);
procedure GrafMode;
procedure EnterGrafic;
procedure ExitGrafic;
(*-----GRAFIG-----*)
(*-----UTILITY2-----*)
procedure ForWd(s : real);
procedure Back(s : real);
procedure Turn(angle : integer);
procedure StartTurtle;
(*-----UTILITY2-----*)
Implementation
(*-----UTILITY1-----*)
procedure LiesReal;
begin
    write(information);
    readln(wert)
end;

procedure LiesInteger;
begin
    write(information);
    readln(wert)
end;

procedure LiesString;
begin
    write(information);
    readln(wert)
end;

procedure InfoAusgeben;
begin
    writeln(information);
    writeln
end;

procedure WeiterRechnen;
begin
    write(information,'<RETURN>-Taste druecken');
```



```
        readln
    end;

    procedure Neuezeile;
    var
        i : integer;
    begin
        for i:=1 to n do
            writeln
        end;
        (*-----UTILITY1-----*)
        (*-----GRAFIC-----*)
        procedure SetzeBildPunkt;
        begin
            MoveTo(xs,maxrow-ys);
            LineRel(0,0)
        end;

        procedure GeheZuBildPunkt;
        begin
            MoveTo(xs,maxrow-ys)
        end;

        procedure SetzeWeltPunkt;
        var
            xs,ys : real;
        begin
            xs:=(xw-Xmin)*maxcol/(Xmax-Xmin);
            ys:=(yw-Ymin)*maxrow/(Ymax-Ymin);
            SetzeBildPunkt(round(xs),round(ys))
        end;

        procedure GeheZuWeltPunkt;
        var
            xs,ys : real;
        begin
            xs:=(xw-Xmin)*maxcol/(Xmax-Xmin);
            ys:=(yw-Ymin)*maxrow/(Ymax-Ymin);
            GeheZuBildPunkt(round(xs),round(ys))
        end;
    end;
```

```
procedure ZieheBildLinie;
begin
    LineTo(xs,maxrow-ys)
end;

procedure ZieheWeltLinie;
var
    xs,ys : real;
begin
    xs:=(xw-Xmin)*maxcol/(Xmax-Xmin);
    ys:=(yw-Ymin)*maxrow/(Ymax-Ymin);
    ZieheBildLinie(round(xs),round(ys))
end;

procedure GrafMode;
begin
    ClrScr;
    GraphDriver:=Detect;
    InitGraph(GraphDriver,GraphMode,'c:\tp\bgi');
    SetGraphMode(GraphMode)
end;

procedure EnterGrafic;
begin
    writeln('Nach Ende der Zeichnung ');
    writeln('<RETURN> - Taste druecken ');
    GotoXY(1,23);
    writeln('-----GrafMode-----');
    WeiterRechnen('Beginnen :');
    GrafMode
end;

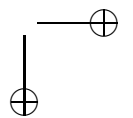
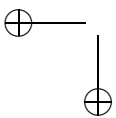
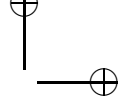
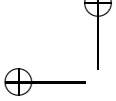
procedure ExitGrafic;
begin
    readln;
    CloseGraph;
    RestoreCrtMode;
    GotoXY(1,23);
    writeln('-----TextMode-----')
```

```
end;
(*-----GRAFIG-----*)
(*-----UTILITY2-----*)
procedure ForWd;
var
  x1,x2 : real;
begin
  x1:=s*cos((hd*pi)/180);
  x2:=s*sin((hd*pi)/180);
  xco:=xco+trunc(x1);
  yco:=yco+trunc(x2);
  ZieheBildLinie(xco,yco)
end;

procedure Back;
begin
  ForWd(-s)
end;

procedure Turn;
begin
  hd:=(hd+angle) mod 360
end;

procedure StartTurtle;
begin
  hd:=90;
  xco:=startx;
  yco:=starty;
  SetzeBildPunkt(startx,starty)
end;
(*-----UTILITY2-----*)
end.
```



# Βιβλιογραφία

- [1] Barnsley M.F., *Fractals everywhere*, 2nd ed., Academic Press Professional, San Diego, 1993.
- [2] Barnsley M.F. and Demko S., *Iterated function systems and the global construction of fractals*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **399** (1985), 243–275.
- [3] Barnsley M.F. and Elton J.H., *A new class of Markov processes for image encoding*, Adv. Appl. Probability **20** (1988), 14–32.
- [4] Barnsley M.F., Ervin V., Hardin D. and Lancaster J., *Solution of an inverse problem for fractal and other sets*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **83** (1986), 1975–1977.
- [5] Barnsley M.F. and Hardin D.P., *A Mandelbrot set whose boundary is piecewise smooth*, Trans. Amer. Math. Soc. **315** (1989), 641–659.
- [6] Beck U., *Computer-Graphik: Bilder und Programme zu Fraktalen, Chaos und Selbstähnlichkeit*, Birkhäuser, Basel and Boston, 1987.
- [7] Becker K.-H. and Dörfler M., *Dynamische Systeme und Fraktale: Computergrafische Experimente mit Pascal*, 3. Auflage, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1989.
- [8] Blanchard P., *Complex analytic dynamics on the Riemann sphere*, Bull. Amer. Math. Soc. **11** (1984), 85–141.
- [9] Curry J.H., Garnett L. and Sullivan D.R., *On the iteration of a rational function: Computer experiments with Newton's method*, Comm. Math. Phys. **91** (1983), 267–277.
- [10] Demko S., Hodges L. and Naylor B., *Construction of fractal objects with iterated function systems*, Comput. Graph. **19** (Proc. Siggraph '85), 271–278.

- [11] Devaney R.L., *Julia sets and bifurcation diagrams for exponential maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **11** (1984), 167–171.
- [12] Devaney R.L., *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2nd ed., Addison–Wesley, Reading, 1989.
- [13] Dewdney A.K., *Beauty and profundity: The Mandelbrot set and a flock of its cousins called Julia*, Scientific American **257** (1987), 118–122.
- [14] Falconer K.J., *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications*, Wiley, Chichester, 1990.
- [15] Hirsch M.W. and Smale S., *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, 1974.
- [16] Husain T., *Topology and maps*, Plenum Press, New York, 1984.
- [17] Hutchinson J.E., *Fractals and self similarity*, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), 713–747.
- [18] Li T–Y. and Yorke J.A., *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), 985–992.
- [19] Miller G.S.P., *The definition and rendering of terrain maps*, Comput. Graph. **20** (Proc. Siggraph '86), 39–48.
- [20] Mukherjea A. and Pothoven K., *Real and functional analysis*, Plenum Press, New York, 1984.
- [21] Oppenheimer P.E., *Real time design and animation of fractal plants and trees*, Comput. Graph. **20** (Proc. Siggraph '86), 55–64.
- [22] Peitgen H.–O. and Saupe D.(eds), *The science of fractal images*, Springer–Verlag, New York, 1988.
- [23] Prusinkiewicz P. and Sandness G., *Koch curves as attractors and repellers*, IEEE Comput. Graph. & Appl. **8** (1988), 26–40.
- [24] Stevens R.T., *Fractal programming in Turbo Pascal*, M&T Books, Redwood City, California, 1990.
- [25] Vrscay E.R., *Julia sets and Mandelbrot–like sets associated with higher order Schröder rational iteration functions: A computer assisted study*, Math. Comp. **46** (1986), 151–169.

# Ευρετήριο

- αλγόριθμος
  - αιτιοκρατικός, 30
  - χρόνων διαφυγής, 93
- ανάκλαση, 28
- ανοικτό κάλυμμα, 24
- άνω φράγμα, 17
- άνω φράγμα
  - ελάχιστο, 17
- απεικόνιση
  - Lipschitz, 21
  - αδιάστατη, 21
  - συστολή, 21
  - συστολική, 21
- απόσταση
  - Hausdorff, 25
  - μεταξύ συνόλων, 17
  - σημείου από σύνολο, 17, 25
- απόσταση, 13
- βαθμός μετασχηματισμού, 27
- γραφική ανάλυση, 72
- γωνία περιστροφής, 28
- διαγράμματα διακλαδώσεων, 79
- διάμετρος, 17
- δυναμικό σύστημα
  - διακριτικό, 51
  - ευαίσθητο σε αρχικές συνθήκες, 84
  - τοπολογικώς μεταβατικό, 83
- δυναμικό σύστημα, 50
- ελκυστής
  - Lorenz, 56
  - Rössler, 66
- ελκυστής, 30, 51
- επαναλαμβανόμενο σύστημα συναρτήσεων, 30
- ημιμετρική, 13
- ισομετρία, 28
- ιστοδιάγραμμα, 73
- κατοπτρισμός, 28
- κάτω φράγμα
  - ελάχιστο, 17
- κάτω φράγμα, 17
- κρίσιμη τιμή, 29
- κρίσιμο σημείο, 29
- κύκλος, 70
- λεκάνη έλξης, 100
- μετασχηματισμός
  - Möbius, 28, 29
  - αναλυτικός, 29
  - αρτοποιού, 52
  - γραμμικός κλασματικός, 28
  - ομοπαράλληλος, 27
  - πολυωνυμικός, 27
  - συσχετισμένος, 27
- μετασχηματισμός, 25
- μετασχηματισμός συμπύκνωσης, 39
- μετατόπιση, 26
- μεταφορά, 26
- μετρική

- Hausdorff, 18  
 Lèvy, 20  
 διακριτική, 16  
 μετρική, 13  
 μετρικός χώρος  
   ακολουθιακώς συμπαγής, 24  
   αριθμησίμως συμπαγής, 24  
   ασύνδετος, 25  
   μη φραγμένος, 16  
   ολικώς ασύνδετος, 25  
   συνεκτικός, 25  
   φραγμένος, 16  
 μετρικός χώρος, 13  
 μονοπαραμετρική οικογένεια, 51  
  
 ομοιομορφικοί χώροι, 21  
 ομοιομορφισμός, 21  
 ομοιότητα, 28  
  
 παράγων κλίμακας, 28  
 παράγων συσταλτικότητας, 22  
 περιοδικό σημείο  
   ελκυστικό, 71  
   υπερβολικό, 83  
 περιστροφή, 28  
 πολλαπλασιαστής, 83  
  
 σημείο  
   έμπροσθεν ασυμπτωτικό, 72  
   όπισθεν ασυμπτωτικό, 72  
   περιοδικό, 70  
   τελικώς περιοδικό, 71  
 σταθερό σημείο  
   απωστικό, 71  
   ελκυστικό, 71  
 σταθερό σημείο, 29  
 συνάρτηση  
   ευαίσθητη εξάρτηση σε αρχικές συν-  
   θήκες, 84  
   λεία, 83  
   ομοιομόρφως συνεχής, 21  
   συνεχής, 20  
   συνεχής σε σημείο, 20  
   τοπολογικώς μεταβατική, 83  
   χαώδης, 84  
 σύνολο  
   Julia, 92  
   Mandelbrot, 85  
   Fatou, 92  
   ανοικτό, 18  
   ευστάθειας, 92  
   κλειστό, 18  
   συμπαγές, 24  
   φραγμένο, 17  
 σύνολο αστάθειας, 72  
 σύνολο ευστάθειας, 72  
 σύνολο συμπύκνωσης, 39  
 σφαίρα  
   ανοικτή, 16  
   κλειστή, 16  
 σχεδόν μετρική, 13  
 σχεδόν μετρικός χώρος, 13  
  
 τελεστής  
   μετατόπισης, 50  
 τροχιά  
   έμπροσθεν, 50  
   όπισθεν, 51  
   περιοδική, 70  
 τροχιά, 50  
  
 υπερβολικό ΕΣΣ με συμπύκνωση, 40  
  
 χώρος  
   διευθύνσεων, 49  
   ημμετρικός, 13  
   κωδίκων, 49  
   ψευδομετρικός, 13  
 ψευδομετρική, 13